

# Física

## Óptica - Curso de Extensão

Prof. Dr. Gil da Costa Marques

Prof. Dr. Luiz Adolfo de Mello

# **Física – Óptica**

**Elaboração de Conteúdo**

**Prof. Dr. Gil da Costa Marques**

**Prof. Dr. Luiz Adolfo de Mello**

---

**Copyright © 2011, Universidade Federal de Sergipe.  
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada  
por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia  
autorização por escrito da UFS.**

**Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central  
Universidade Federal de Sergipe**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**  
Cidade Universitária Prof. “José Aloísio de Campos”  
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze  
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE  
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

# Óptica

Sumário:

1. Luz	04
2. Ótica Geométrica ou Óptica de Raios	14
3. Ondas	29
4. Ondas Eletromagnéticas	40
5. Interferência	52
6. Difração da Luz	61
7. Polarização da Luz	69
8. Princípios Básicos De Um Telescópio Newtoniano	85
9. Microscópio Óptico	92

## Sumário:

1. Luz	04
a. Introdução	04
b. A Natureza da Luz	05
c. A Evolução do Conceito de Fóton	06
d. O Princípio de Huygens	08
e. Dualidade Onda Partícula	10
f. A Velocidade da Luz	11
g. Pressão da Radiação	12
2. Óptica Geométrica ou Óptica de Raios	
a. Introdução	14
b. Propagação da luz em meios homogêneos	15
c. Princípio da independência dos raios	16
d. Princípio da reversibilidade da luz	17
e. A reflexão e a refração da luz	18
f. Espelhos	20
g. Propagação da luz em meios não homogêneos	27
3. ONDAS	29
a. Ondas harmônicas	31
b. Princípio da superposição	34
c. Equação das Ondas	38
d. Ondas planas	39
4. Ondas Eletromagnéticas	41

## Cap.1 - Luz

### Introdução

Os fenômenos associados com a luz estão entre aqueles com os quais o ser humano tem uma relação mais íntima e constante ao longo da sua existência. Pelo fato da luz estar associada ao sentido da visão esta está presente em todas as atividades do dia a dia do homem. Muitos são os fenômenos associados às propriedades da luz. Alguns, como a formação de sombras e de penumbras é corriqueira. Os fenômenos da reflexão e da refração da luz, também são muito comuns. Por exemplo, a nossa imagem em um espelho é o produto da reflexão da luz. Abaixo vemos os raios da lua refletidos nas águas do mar. Como veremos, a Lua é uma fonte secundária de luz. Ela reflete a luz proveniente do Sol. Também vemos como a imagem de uma caneta é distorcida pela água de um copo (refração da luz).

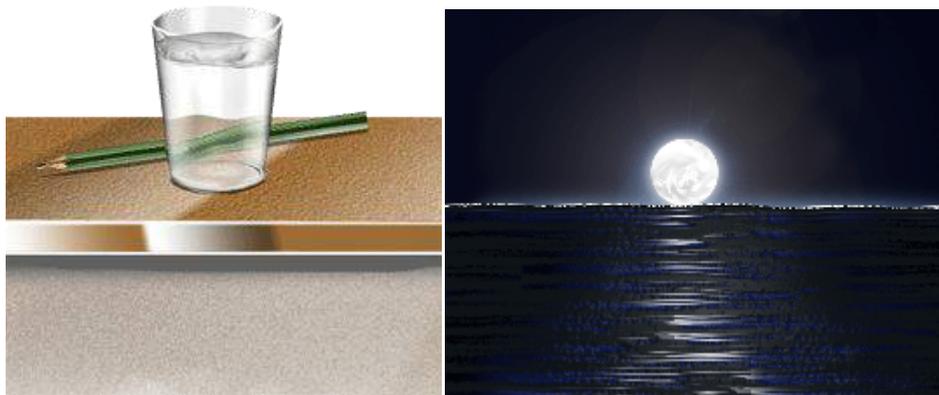


Figura 1.1 – Ilustração de alguns fenômenos ópticos (CEPA)

Alguns fenômenos envolvendo a luz podem ser menos comuns e, às vezes, requerem aparatos especiais para serem observados. Dentre esses podemos citar a interferência e a difração da luz. Outros fenômenos são bem mais sutis de serem observados e interpretados, como o efeito fotoelétrico ou o espalhamento Raman.

A área da óptica é um campo de estudos fascinante. De maneira simplificada, podemos dizer que ela é o ramo da Física que estuda a propagação da luz e sua interação com a matéria.

Em muitas áreas da ciência e tecnologia, o entendimento de determinados conceitos pode ser difícil porque seus efeitos não são facilmente visualizados. Na óptica, entretanto, o simples uso de um laser permite a visualização de um dado efeito como função de vários parâmetros, facilitando o

aprendizado. Isto se deve principalmente à coerência (mesma fase de onda), monocromaticidade (mesma frequência) e colimação da luz proveniente deste instrumento, que permitem a observação de fenômenos tais como interferência e difração, nos quais a natureza ondulatória da luz se manifesta claramente. Entretanto, para se chegar ao desenvolvimento deste dispositivo, e de vários outros que são importantes no nosso cotidiano, um longo caminho foi percorrido e este percurso gerou um histórico de fatos científicos bastante rico. Alguns aspectos que merecem destaque estão ligados às ideias sobre a natureza da luz e aos caminhos paralelos que a óptica e o eletromagnetismo trilharam durante séculos. Para se entender um pouco estes fatos, fizemos no e-livro óptica básico, uma breve revisão histórica do desenvolvimento dos conceitos principais ligados à óptica.

*A óptica é a área da Física que estuda a Luz: sua natureza, suas propriedades e suas aplicações. A óptica se propõe também a estudar a interação da luz com a matéria.*

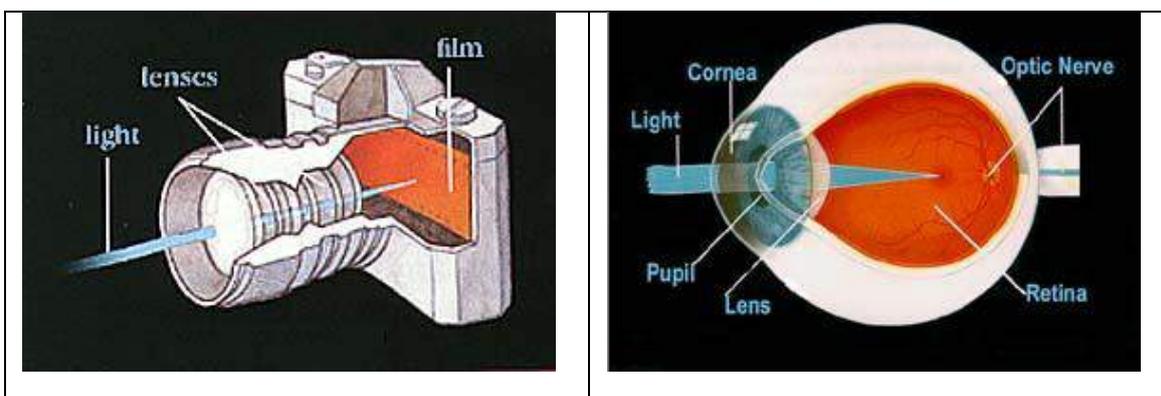


Figura 1.2 – Ilustração da similaridade entre uma câmera Fotográfica e o olho humano. [http://www.pasadenaeye.com/faq/faq15/faq15\\_text.html](http://www.pasadenaeye.com/faq/faq15/faq15_text.html)

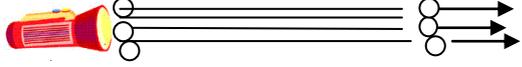
## A NATUREZA DA LUZ

Desde a antiguidade os filósofos e os cientistas (estes depois do renascimento) se dedicaram a explicar os fenômenos envolvendo a luz. Desde a época de Newton uma das questões centrais foi o debate sobre a natureza da luz. Este debate envolveu grandes filósofos e cientistas. A questão central poderia ser resumida da seguinte forma:

**Teria a luz uma natureza ondulatória ou uma natureza corpuscular?**

**Ou seja,**

**a luz seria uma onda ou uma partícula (fóton)?**

Luz como ondas se propagando	Fótons se propagando = Raios de Luz
	

## A evolução do conceito de fóton

Hoje sabemos que a luz é composta de partículas denominadas de fótons. Sendo a luz constituída dessas partículas diminutas, podemos nos perguntar por que só neste século nos demos conta disso?

O homem conhece a luz e seus efeitos desde eras remotas. É claro que ela despertava a curiosidade dos antigos. A formação de sombras e penumbras ocorre no dia-a-dia de todos os seres humanos. Os eclipses já eram utilizados alguns séculos antes de Cristo como um meio de determinar a distância da Terra até a Lua. Tales de Mileto, seis séculos antes de Cristo, já aprendera o método de triangulação para medir distâncias, inferindo a altura da Pirâmide de Gizé a partir da sombra projetada no solo pela pirâmide. Erastóstenes utilizou a sombra de uma haste fincada no solo (um gnomo) para determinar o raio da Terra.

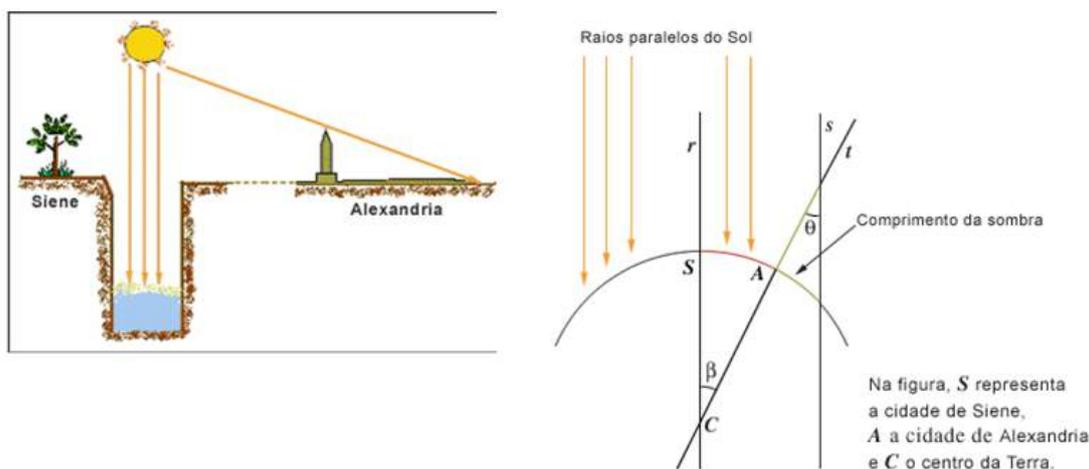


Fig.1.3 – Método de Erastóstenes para se medir o raio da Terra

As sombras e penumbras podem ser explicadas pelo Princípio da Propagação Retilínea da Luz. Princípio esse já enunciado pelos gregos e aparece na obra de Euclides (300 a.C.)

Outros fenômenos associados à luz, como a reflexão e a refração, já eram conhecidos na antiguidade. Fala-se muito em instrumentos utilizados com muita engenhosidade por Arquimedes na defesa de Siracusa. Dentre eles estavam alguns espelhos para provocar confusão nas hostes inimigas (os romanos).

A suspeita de que a luz tinha velocidade finita começou provavelmente com Galileu. Na época de Newton, ele já tinha conhecimento da determinação da sua velocidade feita por Roemer. De acordo com ele, a luz levaria sete minutos para viajar do Sol até a Terra. Esses fatos, bem como outros, poderiam ser explicados se a luz fosse composta por partículas. Por isso, Newton elaborou uma teoria para a luz, cujo ponto básico é a sua constituição por corpúsculos de luz. O livro de Newton começa definindo:

## DUALIDADE ONDA PARTÍCULA

Após os trabalhos de Young e Fresnel a teoria de Newton caiu no esquecimento. Foi retomada depois do trabalho pioneiro de Albert Einstein em (1905) sobre o efeito fotoelétrico. Esse efeito pode ser resumido assim. Podemos arrancar elétrons de uma placa metálica se fizermos incidir luz sobre ela. Essa é a origem do nome "fotoelétrico". Sabemos que para arrancar um elétron devemos despendar certa quantidade de energia, pois os elétrons estão presos (ligados) à placa.

Da teoria eletromagnética de Maxwell se deduz que a energia é armazenada ou transmitida de forma contínua e de forma infinitesimal. Deste modo, se a luz não fosse constituída por corpúsculos haveria a necessidade de um intervalo de tempo entre a luz incidir e o elétron sair. Isso porque se acreditava na necessidade de o elétron acumular energia vinda da radiação luminosa. Ademais, de acordo com a teoria ondulatória qualquer onda eletromagnética serviria (isto é, de qualquer comprimento de onda). Algumas seriam apenas mais eficientes do que outras. Isto é, arrancariam em menor tempo do que outras.

Dois surpresas ocorreram. A primeira é a de que só radiação com uma frequência acima de certo valor poderia arrancar elétrons. E a segunda é a de que para essa radiação não haveria a necessidade de se esperar certo intervalo de tempo. Então, Einstein interpretou corretamente que o efeito fotoelétrico com essas características só poderia ser explicado se a luz fosse composta por partículas (denominada por ele de quanta de luz) denominadas hoje de fótons. Os fótons observados deram razão a Einstein. Desde então as evidências têm-se acumulado em favor da teoria corpuscular da luz, que é a teoria vigente.

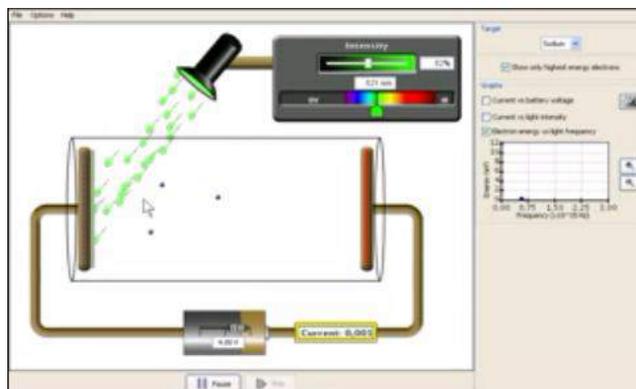


Fig.1.10 – Efeito Fotoelétrico (tirado de <http://www.youtube.com/watch?v=bnR1syXU5dU> )

A confirmação inequívoca de que a luz exibe a natureza corpuscular veio com a descoberta, em 1923, do efeito Compton (em homenagem ao seu descobridor, Arthur Compton). Nesse efeito, o fóton exibe um comportamento típico de bola de bilhar. Isto é, a colisão entre o fóton e um elétron obedece às regras de colisão entre partículas.

Como todas as partículas, os fótons exibem uma natureza dualística: onda e partícula. Os fótons em alguns fenômenos exibem mais claramente a natureza ondulatória (como na interferência de Young) e em outros se torna mais evidente a natureza de partículas (como no efeito fotoelétrico). Hoje, com o dualismo onda-matéria podemos conciliar a ideia de Newton com os resultados de Young e de Fresnel.

Os fótons são como todas as partículas. Os elétrons, por exemplo, exibem a mesma natureza dualística: onda e partícula. Hoje, com o dualismo onda-matéria podemos conciliar a ideia de Newton com os resultados de Young e de Fresnel. Apesar dessas características serem excludentes, elas são de fato complementares.

## A VELOCIDADE DA LUZ

A luz ao incidir sobre um determinado meio tende a se propagar através dele. A velocidade com que a luz se propaga depende do meio material. A velocidade máxima de propagação da luz simbolizada pela letra  $c$  ocorre num meio do qual extraímos toda a matéria. Tal meio é o que denominamos de vácuo. Por exemplo, podemos considerar o meio entre a Terra e o Sol, ou entre a Terra e as estrelas como sendo o vácuo. A partir da formulação da Teoria da Relatividade Restrita e das experiências de Michelson e Morley ficou constatado que a velocidade da luz é uma constante universal, ou física. Medidas experimentais modernas determinam que essa velocidade seja de aproximadamente

$$c = 299.792.458 \frac{m}{s}$$

1.1

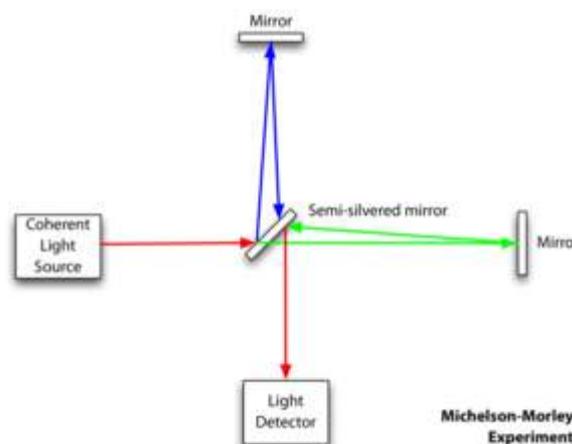


Figura 1.11 – Experimento de Michelson e Morley.

A relação entre a velocidade da luz num determinado meio e a velocidade da luz no vácuo é dada por:

$$C = nV \quad 1.2$$

Onde  $n$  é o índice de refração do meio. Assim, como a luz se propaga na água a uma velocidade maior do que no ar, temos que  $n$  para a água é maior que 1. O índice de refração entre dois meios quaisquer é dado pela razão inversa entre os seus índices de refração:

$$N_{12} = n_2/n_1 = v_1/v_2 . \quad 1.3$$

Após a teoria de Maxwell, podemos relacionar  $n$  com as propriedades eletromagnéticas do meio.

## PRESSÃO DA RADIAÇÃO

### Modelo Clássico

A **pressão de radiação** é a pressão exercida sobre certa superfície devido a incidência de uma onda eletromagnética. Apesar de não possuir massa, isto ocorre porque uma onda eletromagnética possui momento linear. Logo, o princípio da conservação do momento linear exige que a interação da radiação eletromagnética sobre a superfície deve transmitir momento linear. Isto é, Maxwell mostrou que a magnitude do momento transferido  $\Delta p$  pela radiação em uma absorção total por um corpo é proporcional à variação da energia deste:[Halliday]

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c} \quad 1.4$$

Onde  $c$  é a velocidade da luz. A direção do momento adquirido pelo corpo é o da frente de onda incidente.

No caso de um onda refletida, a lei da conservação do momento impõe que a variação do momento deve ser o dobro do caso da absorção total:

No caso de um onda refletida, a lei da conservação do momento impõe que a variação do momento deve ser o dobro do caso da absorção total:

$$\Delta p = \frac{2 \cdot \Delta U}{c} \quad 1.5$$

Suponha que a radiação esteja sendo refletida ou absorvida por uma superfície de área  $A$  que esta tem intensidade  $I$ . Logo, a variação de energia em uma reflexão total é

$$\Delta U = 2IA\Delta t \quad 1.6$$

e a variação no momento linear é

e a variação no momento linear é

$$\Delta p = \frac{2 \cdot I \cdot A \Delta t}{c} \quad 1.7$$

Usando a segunda lei de Newton temos

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2 \cdot I \cdot A}{c} \quad 1.8$$

Calculando-se a razão entre a força atuante sobre a superfície e a área total de atuação encontra-se a pressão de radiação.

$$P = \frac{f}{A} = \frac{2 \cdot I}{c} \quad 1.9$$

A pressão da radiação é um efeito muito importante em astrofísica. Ela é um dos efeitos que mantém uma estrela estável. Ou seja, que a atração gravitacional não colapse em um ponto toda a massa gasosa desta.

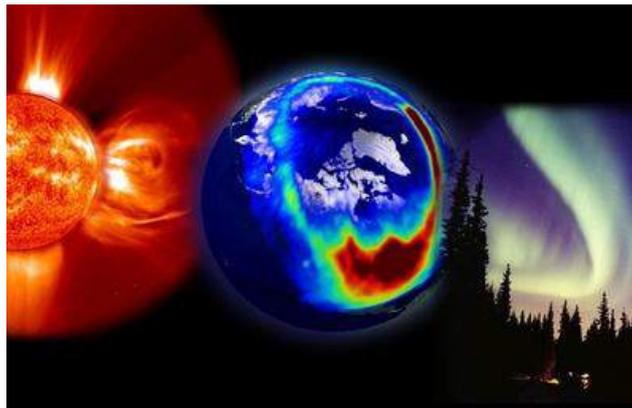


Figura 1.12 - Vento Solar. Aurora Boreal.

A **pressão de radiação** é devida ao fato da radiação ser uma forma de energia. Max Planck, ao conceber seu modelo para radiação de corpo negro e apresentar seu artigo sobre a distribuição de energia no espectro normal, em 2 de fevereiro de 1900, estabeleceu experimentalmente que para cada unidade da escala de frequência (Hz) a energia emitida ou absorvida em J-s = N-M<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>, é de  $h = 6,602 \cdot 10^{-34}$  J-s. Se formos analisar por este parâmetro, tendo em vista de que newtons equivalem a hectogramas-força, podemos converter a constante de Planck  $h$  para gramas-força gF e dividirmos 1 g por ela, o resultado é um valor que, em escala de frequência, equivale a frequência de energia mecânica de um grama.

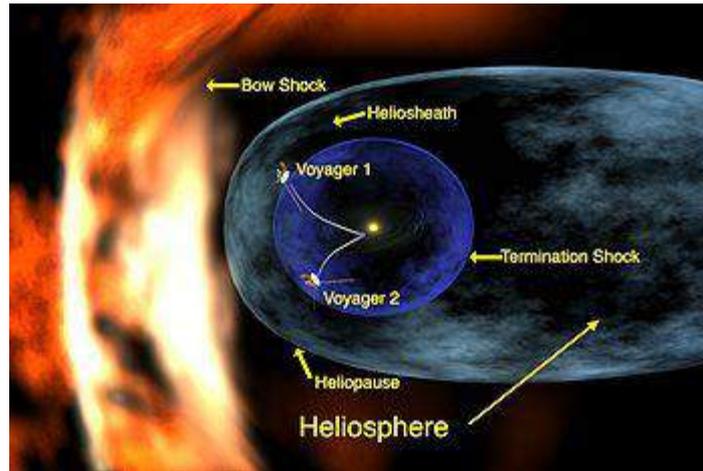


Figura 1.13 – Formação da Heliosfera entorno da Terra.

## Cap.2 - Óptica Geométrica ou Óptica de Raios

### 2.1 - Introdução

Ao tratarmos o tópico óptica de raios, também conhecida como óptica geométrica, não levamos em consideração o caráter ondulatório da luz, nem sua polarização. Nestas condições, efeitos tais como difração e interferência não se evidenciam.

Do ponto de vista da ótica entende-se como meio homogêneo aquele no qual o índice de refração não depende da posição, sendo, portanto constante. Note que o meio pode ser simultaneamente homogêneo e anisotrópico, caso comum em cristais, para os quais o índice de refração tem valores diferenciados para distintas direções de propagação da luz. Já no meio não homogêneo, o índice de refração é dependente da posição, em geral devido às flutuações de densidade, temperatura, ou composição química do material.

Este capítulo inicia-se com uma breve exposição das propriedades de propagação de raios em meios homogêneos, com ênfase na sua refração ao atingir uma interface dielétrica plana. Este é um tópico que será revisto no [Cap. 6](#), depois que abordarmos os conceitos de polarização da luz e condições de contorno do campo eletromagnético, que nos levarão às equações de Fresnel. Em seguida, trataremos de uma situação bem mais interessante, a propagação de luz em meios não homogêneos. Em particular, faremos, no final do capítulo, uma analogia entre a mecânica clássica e a óptica geométrica. Esta analogia será importante para a obtenção da equação de Schrödinger.

### 2.2: Propagação da luz em meios homogêneos

Os experimentos realizados até a primeira metade do século XVII estabeleceram que quando um raio de luz se propaga, obedece aos seguintes princípios:

a) nos meios homogêneos a propagação é retilínea, como na figura abaixo, e

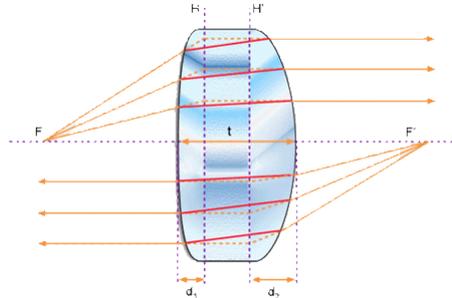
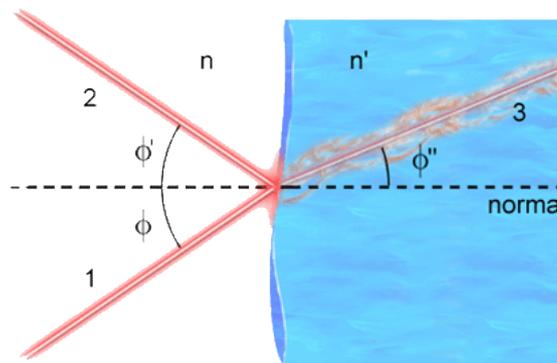


Fig.2.1 – Propagação Retilínea da Luz

b) quando um feixe de raios de luz (raio 1) atinge a interface que separa dois meios distintos temos uma fração refletida (raio 2) e outra refratada (raio 3), conforme mostra a Fig. 2.2.

Como discutido por Huygens, cada meio é caracterizado por um parâmetro chamado índice de refração,  $n$ , que determina a velocidade com que o raio se propaga naquele meio. A direção seguida pelos raios 2 e 3 não é arbitrária. Demonstraremos na seção 6.6, usando as condições de contorno para o campo eletromagnético, que eles obedecem as seguintes regras:

(i) os raios 1, 2 e 3 estão todos num mesmo plano, o qual é chamado de plano de incidência,



**Fig. 2.2 - Reflexão e refração de um raio luminoso numa interface dielétrica.**

(ii) O ângulo de incidência é igual ao da reflexão:  $\phi = \phi'$  e

(iii) O produto do índice de refração do meio pelo seu ângulo de incidência é uma constante:

$$n \sin \phi = n' \sin \phi' \text{ (lei de Snell).}$$

Estas leis são muito importantes para o traçado dos raios ópticos na presença de interfaces dielétricas. Note que pela expressão acima que

(iii) quando um raio penetra num meio de índice de refração maior ( $n' > n$ ) ele se aproxima da normal.

$$\theta = \arcsen\left(\frac{n'}{n} \sen \theta'\right)$$

### 2.3 Princípio da independência dos raios

Sabe-se experimentalmente que os fótons não interajam entre si. Isto é, os fótons ao se aproximarem ou ao se cruzarem não são influenciados por outros fótons. Os fótons são, portanto, independentes entre si. Segue daí que os raios luminosos são independentes.

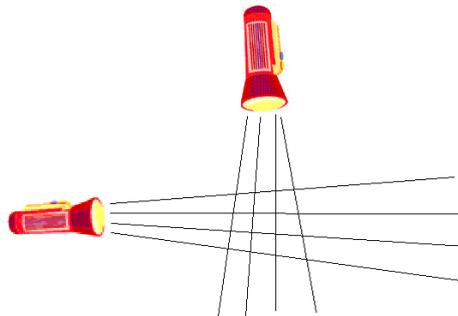


Fig.2.3 – Cruzamento de Raios de Luz

### 2.4 - Princípio da reversibilidade da luz

Finalmente, salientamos que se a trajetória dos fótons (e portanto, da luz) for percorrida num certo sentido, o sentido oposto também é possível. Por exemplo, se a luz seguir uma série de segmentos de reta ao longo dos segmentos AB, BC, CD da figura (2.4), então o percurso ao longo dos segmentos DC, CB e BA é igualmente possível.

Isso quer dizer que se um raio de luz seguir uma trajetória num certo sentido e se esse raio for refletido passando por uma parte da trajetória, ele fará a trajetória inteira. Essa é base do princípio da reversibilidade da luz.

Qualquer sentido de trajetória de um raio luminoso é possível.

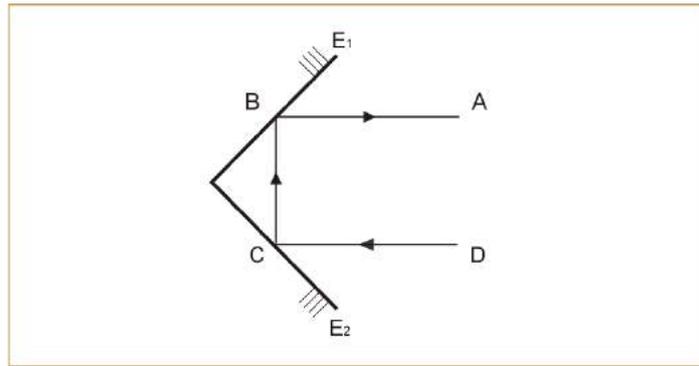


Fig.2.4 - Princípio da Reversibilidade

[http://osfundamentosdafisica2.blogspot.com/2015/08/cursos-do-blog-termologia-optica-e-ondas\\_74.html](http://osfundamentosdafisica2.blogspot.com/2015/08/cursos-do-blog-termologia-optica-e-ondas_74.html)

## 2.5 - A Reflexão e a Refração da Luz

A reflexão da luz é um dos fenômenos mais comuns envolvendo a propagação da luz. A reflexão ocorre quando a luz incide sobre a superfície de separação entre dois meios com propriedades distintas. A reflexibilidade é a tendência dos raios de voltarem para o mesmo meio de onde vieram.

Quando a luz incide sobre uma superfície separando dois meios, podem ocorrer dois fenômenos distintos: reflexão da luz e refração da luz. Parte da luz reflete e se propaga no mesmo meio no qual a luz incide (a reflexão da luz). A outra parte da luz passa de um meio para o outro se propagando nesse segundo. A esse último fenômeno (no qual a luz passa de um meio para o outro) se denomina de refração da luz.

Os dois fenômenos ocorrem concomitantemente. Pode haver predominância de um fenômeno sobre o outro. Que fenômeno predominará vai depender das condições da incidência e da natureza dos dois meios.

Se a superfície de separação entre os dois meios for plana (por exemplo, superfície de um metal) e polida (uma superfície regular) então a um feixe incidente de raios luminosos paralelos corresponderá um feixe refletido de raios luminosos igualmente paralelos. A reflexão nesse caso será denominada de regular.

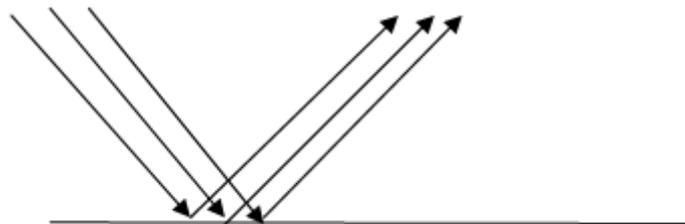


Fig.2.5 - Reflexão Regular

Se a superfície de separação apresentar rugosidades a reflexão será difusa. A luz será espalhada em todas as direções. Se considerarmos um feixe de raios luminosos incidentes paralelos, os raios refletidos irão tomar as mais diversas direções. A grande maioria dos objetos reflete a luz de uma maneira difusa. Isso nos permite vê-lo de qualquer posição que nos situarmos em relação a ele.

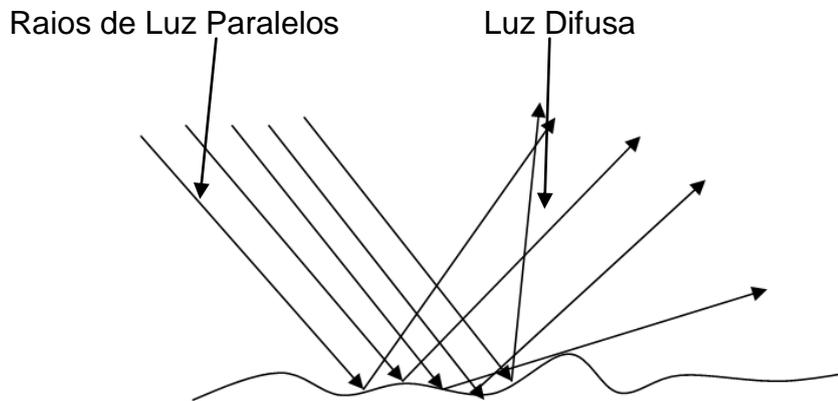


Fig.2.6 - Reflexão de luz por superfície irregular

Parte da luz é absorvida pelo objeto. Diferentes materiais absorvem luz de forma diferente e por isso vemos objetos das mais variadas cores.

### As leis da reflexão

Para entendermos as leis que regem o fenômeno da reflexão precisamos introduzir as definições de planos de incidência da reflexão e ângulos de incidência. Quando o raio de luz incidir sobre a superfície de separação entre dois meios ela o fará num ponto P sobre a superfície. Por um ponto qualquer de uma superfície podemos fazer passar uma reta perpendicular a ele e que o atravessa. Essa é a reta N ou a normal à superfície. O ângulo formado pelo raio (i) incidente e a reta normal (N) é o ângulo de incidência (representado por  $\hat{i}$ ).

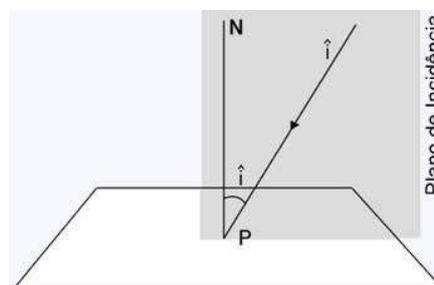


Fig.2.7 - Plano de Incidência

O ângulo de reflexão (r) é o ângulo formado pelo raio refletido e a reta normal N. O plano formado pelo raio incidente (ou a reta que o contém) e a reta

normal, é o plano de incidência. Analogamente, o plano de reflexão é o plano que contém o raio refletido  $r$  e a reta normal  $N$ .

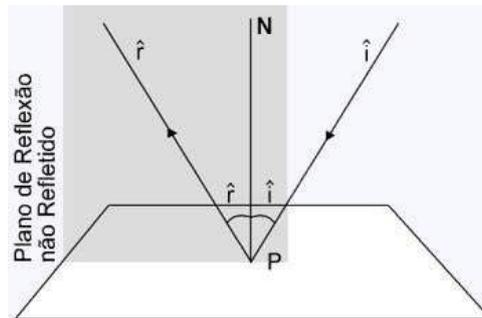


Fig.2.8 - Plano de Reflexão

O fenômeno da reflexão é descrito por duas leis - as leis da reflexão. Tais leis tem uma base empírica. Isto é, elas seguem de inúmeras observações do fenômeno.

### Primeira lei

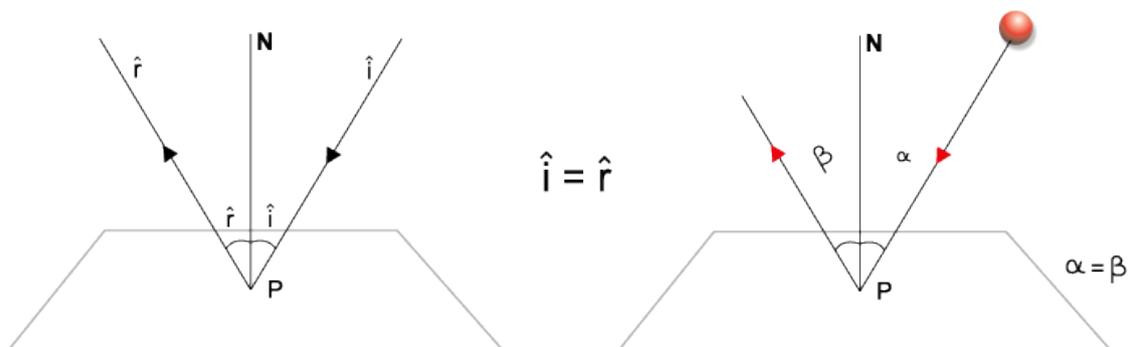
**O plano de incidência coincide com o plano de reflexão.**

Dito de outra forma essa lei estabelece que “O raio de incidência a reta normal e o raio refletido estão contidos no mesmo plano”.

### Segunda lei

**O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.**

Na verdade essas duas leis, essencialmente empíricas, podem ser entendidas a partir da natureza corpuscular da luz. De fato, podemos pensar na reflexão como resultado de colisão dos fótons com a superfície de separação entre dois meios.



## 2.6 - Espelhos

Quando a superfície de separação entre dois meios permitir que a maior parte da luz seja refletida e se essa reflexão for regular, então dizemos que a superfície entre os dois meios se constitui num espelho. Se essa superfície for

plana (se ela se constituir num plano) então o espelho é dito plano. Se a superfície for esférica o espelho é dito esférico.

## Formação de imagens

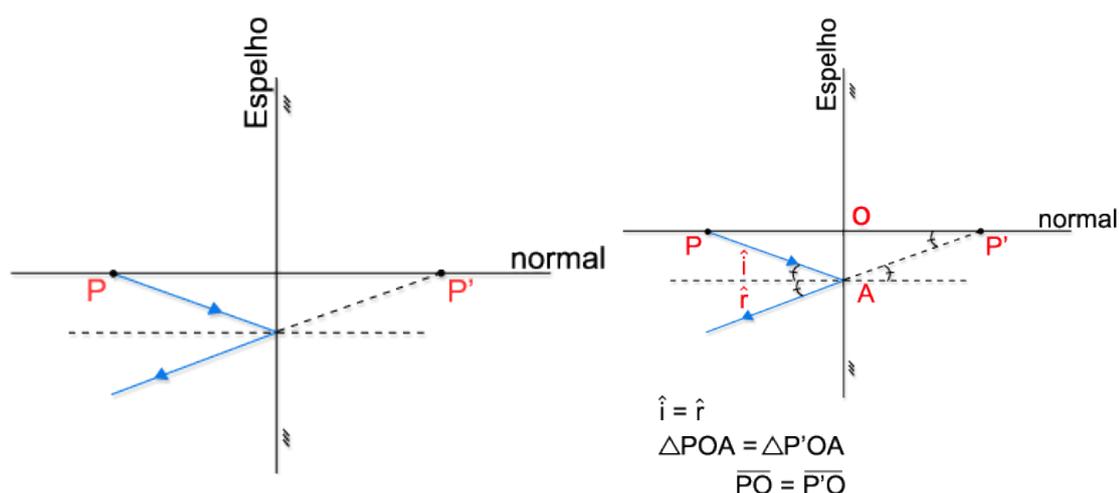
Os espelhos possuem muitas utilidades. A principal delas é a de se auto-observar. Outra utilidade dos espelhos é facilitar a observação de objetos que não estejam diante de nossos olhos. Permitem-nos, por exemplo, ver o que está atrás de nós, que é o caso dos espelhos retrovisores colocados nos veículos automotores.

O uso do espelho é possível como consequência da sua propriedade de formação de imagem. O processo de formação da imagem tem a ver com as propriedades da reflexão. Para entendermos o processo de formação das imagens em espelhos começaremos pela análise da imagem de um ponto. Isto é, começaremos a discussão de formação da imagem de um objeto muito pequeno. Tão pequeno que sua dimensão é desprezível.

## Imagem de um objeto puntiforme

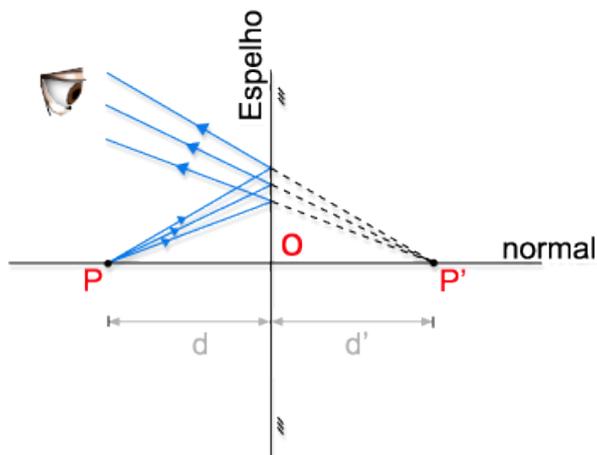
Uma fonte de luz puntiforme pode ser representada como um objeto muito pequeno de dimensões desprezíveis. Consideremos esse ponto (ponto P) a uma distância  $d$  do espelho. Tal fonte emite luz em todas as direções. Analisemos agora o que acontece quando um desses raios incide sobre um espelho plano.

Ele vai refletir de tal modo que os ângulos  $\hat{i}$  e  $\hat{r}$  sejam iguais. Desse modo se projetarmos o raio  $\vec{r}$  esse atingira o ponto  $P'$  igualmente distanciado do espelho como P. Ver figura à esquerda abaixo.



Consideremos agora o que acontece com outros raios luminosos provenientes de P. Consideremos agora o prolongamento de todos os raios luminosos refletidos. Eles se encontram num ponto  $P'$ . Tal ponto está à mesma

distância  $d$  do espelho. Os pontos  $P$  e  $P'$  são simétricos em relação ao espelho. O ponto  $P'$  é o ponto imagem do ponto  $P$ . Ver figura à direita acima.

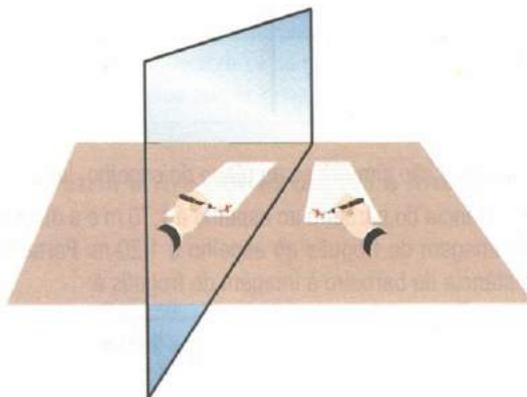


Um observador em frente a um espelho verá a imagem do objeto localizado no ponto  $P'$ . Por que isso acontece? O olho humano opera de tal forma que o que ele "vê" é aquilo que está na direção dos raios luminosos que atingem o olho.

### Imagem de um objeto extenso

Consideremos a imagem de um objeto extenso na frente de um espelho plano. Usemos a construção mental de que um objeto extenso é constituído de um grande número de pontos. Tudo que devemos fazer agora é analisar a imagem de cada um desses pontos. O conjunto das imagens dos pontos dá a imagem do objeto.

Em primeiro lugar é bom saber que a imagem de cada ponto é simétrica em relação ao plano do espelho. O objeto e a imagem serão, portanto, simétricos em relação ao plano do espelho. Como consequência, o tamanho da imagem será igual ao tamanho do objeto. A distância de cada ponto do espelho ao objeto é igual à distância da imagem ao espelho. Daí resulta a simetria em relação ao espelho.



*Se você escreve com a mão direita, sua imagem escreve com a esquerda.*

Outra coisa interessante a respeito dos espelhos é que a imagem de um objeto nem sempre é igual ao do objeto. Em geral a imagem não se superpõe ao objeto. O espelho troca a direita pela esquerda e vice-versa. Diz-se em linguagem científica que o objeto e sua imagem são figuras enantiomorfas (formas opostas).

## Imagens reais e virtuais

Quando se forma uma imagem no processo de reflexão, essa imagem pode ser real ou virtual. Denominamos a imagem obtida no processo de reflexão de real quando esta imagem é obtida mediante o encontro dos próprios raios luminosos refletidos.

Uma imagem é virtual quando ela é formada pelo processo de prolongamento dos raios luminosos refletidos (e não dos próprios raios).

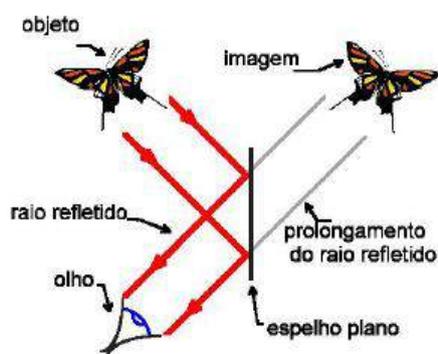


Fig.2.8 - Imagem Virtual gerada por um espelho plano.

A imagem de um objeto diante de um espelho plano é uma imagem virtual. Imagens reais podem ser obtidas quando se usa espelho côncavo ou convexo.

## Campo visual de um espelho plano

Um espelho tem um campo visual restrito para um dado observador. O campo visual é a região do espaço dentro do qual todos os objetos nela situados serão vistos. Objetos fora dessa região não são observados. O campo visual depende do tamanho do espelho, da distância do observador ao espelho e da localização do espelho em relação ao observador.

A razão da existência do campo visual é que os raios luminosos provenientes dos objetos devem ser refletidos pelo espelho e devem chegar até o olho humano. Consideremos um ponto próximo de um espelho. Ele será acessível ao observador (na figura representada pelo olho do mesmo) se os raios luminosos refletidos atingirem o olho.

Para determinarmos o campo visual consideremos a imagem do olho no espelho. A partir da imagem do olho traçamos duas retas as quais interceptarão o espelho pelas duas extremidades. A região do espaço

compreendida entre as duas retas e o espelho é o campo visual do mesmo. Note-se que o campo visual depende da posição do observador em relação ao espelho e das dimensões do mesmo.

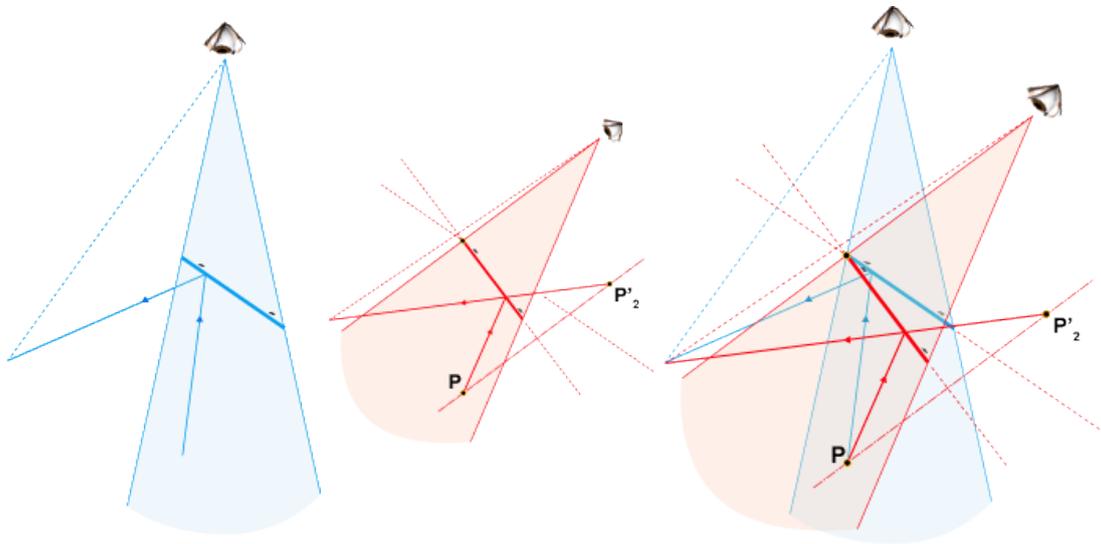
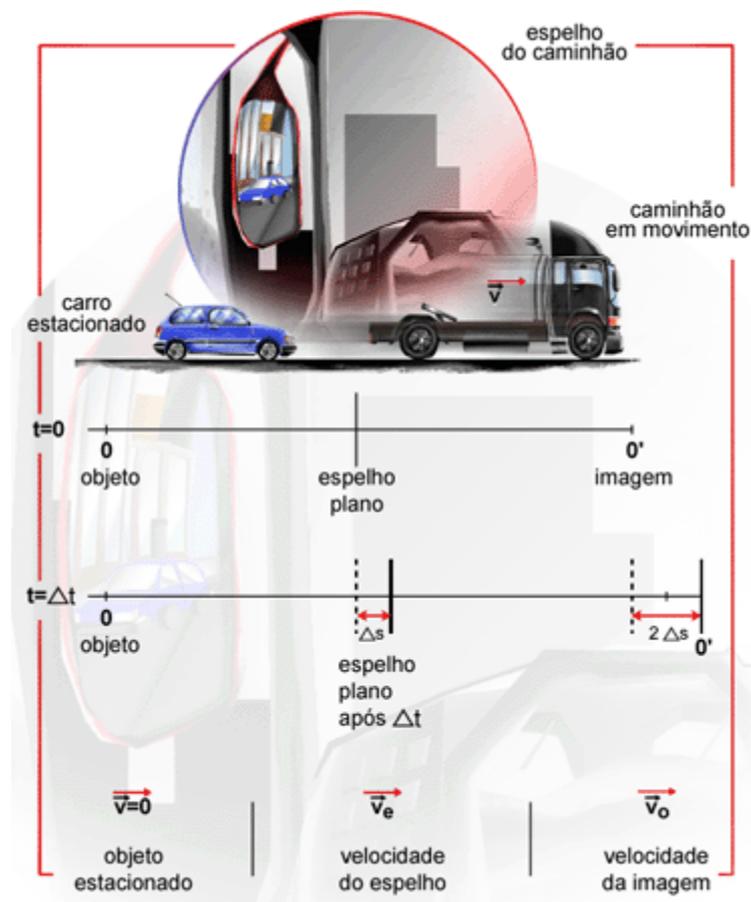


Figura 2.9 - Translações e rotações de um espelho plano

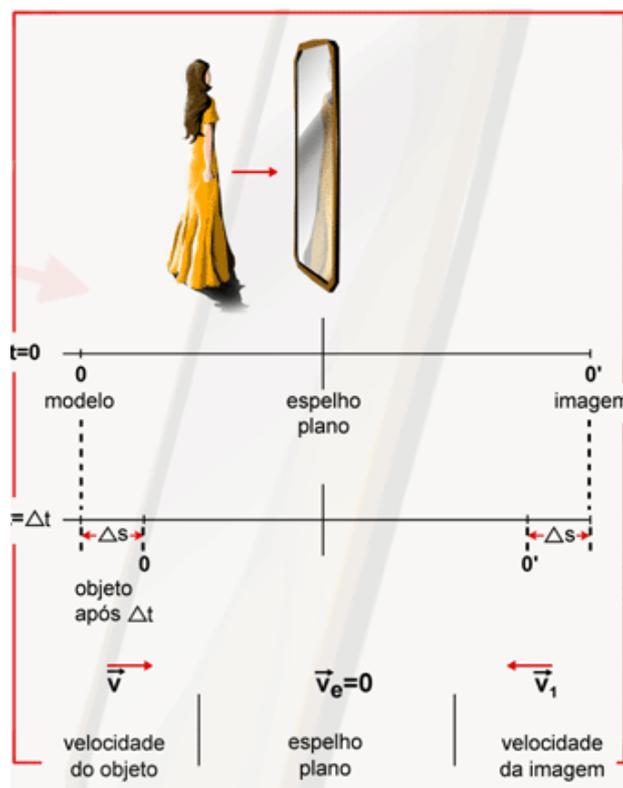


Quando fazemos uma translação de um espelho plano (isto é, o afastamos ou o aproximamos mantendo-o paralelo ao original) verificamos que a forma da imagem é preservada. No entanto, a distância da imagem do espelho se altera no mesmo valor da distância de aproximação ou afastamento do espelho. Assim, se um espelho se deslocar de um valor  $d$  (uma distância  $d$ ) a imagem se deslocará em relação ao espelho pelo mesmo valor  $d$ . O deslocamento da imagem em relação ao observador será de  $2d$ .

Se um objeto se aproximar (ou afastar) correndo em direção a um espelho com velocidade  $v$  sua imagem também se aproximará (ou afastará) do espelho com velocidade  $v$  (mas com sentido contrário). Portanto, a velocidade da imagem em relação ao objeto será  $2v$ .

## Sistemas de Espelhos Planos

Às vezes empregamos um sistema de espelhos. Alguns arranjos de espelhos produzem efeitos deveras interessantes e são muito usados em museus de ciências em geral. Com eles podemos obter muitas imagens de um objeto, simulando situações muito impressionantes. Outras vezes estamos apenas interessados em construir sistemas ópticos simples.



Consideremos dois espelhos colocados perpendicularmente um em relação ao outro. É fácil verificar que nesse caso são formadas três imagens. Na medida em que o ângulo aumenta, o número de imagens diminui. O

contrário também é verdade. Na medida em que o ângulo diminui o número de imagens aumenta. Uma situação curiosa é aquela na qual os espelhos são dispostos paralelamente um ao outro. Neste caso formam-se infinitas imagens.

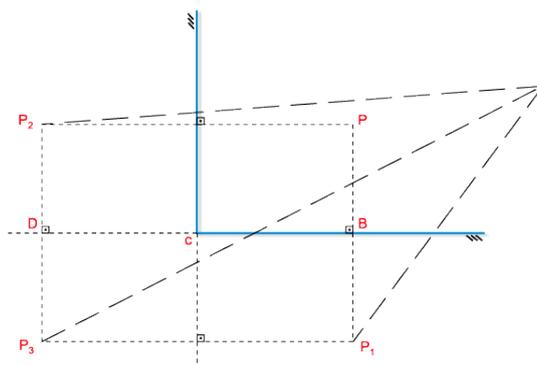


Figura 2.10 – Formação das imagens, pontos P, em um arranjo perpendicular de espelhos planos.

Por que as imagens se multiplicam? Isso ocorre porque as imagens na frente de um espelho se comportam como objetos na frente dos mesmos produzindo uma nova imagem. Em quando a imagem de um espelho estiver na frente do outro espelho o processo se repete.

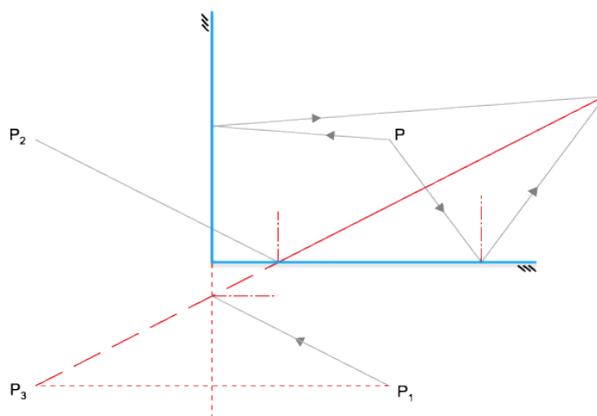


Figura 2.11 – Formação das imagens, pontos P, em um arranjo perpendicular de espelhos planos.

Quantas imagens se formarão em um arranjo perpendicular de espelhos?

Sendo  $\theta$  o ângulo (medido em graus) entre os espelhos, então, se  $360/\theta$  for um número inteiro par, o número de imagens será dado por

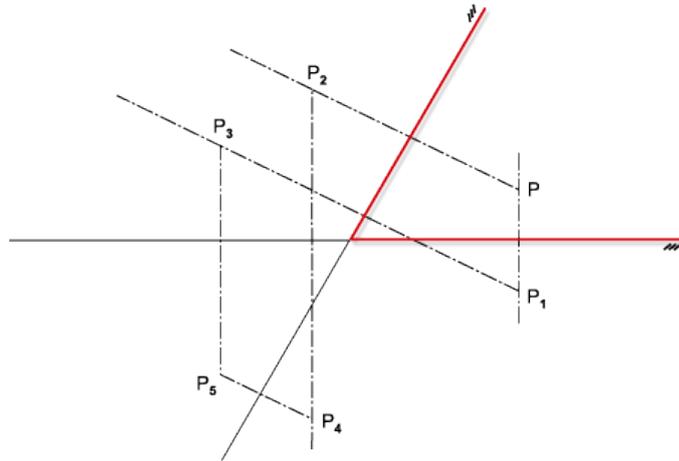
$$M = \frac{360}{\theta} - 1$$

2.1

Se  $360^\circ/\theta$  for um número ímpar a expressão acima só valeria para objetos localizados no plano bissetor de  $\theta$ . No caso anterior, em que  $360/\theta = 4$  obtemos o número correto de imagens, isto é

$$M = \frac{360}{\theta} - 1 = 4 - 1 = 3$$

Se o ângulo for  $60^\circ$  o número de imagens será igual a 5. Ver figura abaixo.



Em seguida trataremos o caso da propagação da luz em meios não homogêneos, para o qual obviamente um meio homogêneo é um caso particular. Através do princípio do tempo mínimo, ou princípio de Fermat, vamos deduzir a lei dos senos. Apresentaremos ainda quatro abordagens teóricas diferentes, que serão aplicadas a algumas situações específicas, em particular ao caso em que o índice de refração depende de apenas uma coordenada.

## 2.6 - Propagação da luz em meios não homogêneos

A motivação para o estudo da propagação de raios em meios não homogêneos encontra-se nas diversas aplicações práticas e situações que ocorrem no nosso cotidiano, e só será vista no óptica nível avançado. Dentre os vários exemplos que podem ser citados, destacamos os seguintes:

### Turbulência Atmosférica

Ao olharmos para as estrelas em uma noite de céu claro, notamos que elas tremem ou piscam. Isto se deve às turbulências atmosféricas, tais como flutuações de pressão e densidade, que levam à formação de correntes de vento e variações do índice de refração do ar. Como consequência, o caminho percorrido pelo raio de luz não é estável, levando a dificuldades para as observações astronômicas de corpos celestes distantes, o que obriga o uso de

satélites, como por exemplo, o Hubble, ou o emprego de óptica adaptativa. Na óptica adaptativa emprega-se um laser de corante para excitar átomos de sódio existentes na camada superior da atmosfera. Isto gera uma mancha circular brilhante devido à luminescência do sódio, que devido às flutuações atmosféricas é visto de uma forma distorcida pelo telescópio. Um sistema servo-mecânico corrige então a curvatura de um dos espelhos do telescópio, de maneira a eliminar estas distorções. O tempo de resposta deste sistema de correção é da ordem de 0.1 s.

## Efeito miragem

O aquecimento do ar próximo à superfície da Terra modifica seu índice de refração e isto faz com que a luz execute uma trajetória não retilínea. Este efeito é claramente observado nas transmissões de corridas de carros pela TV. O ar aquecido pelo contato com o asfalto realiza um movimento convectivo ascendente fazendo tremer as imagens dos carros, como se houvesse uma tênue fumaça diante deles. O efeito do desvio da luz é ainda mais evidente para os raios rasantes, como quando viajamos de carro e observamos a imagem do céu e nuvens refletidas no asfalto, dando a impressão de poças d'água. Nesta situação os raios rasantes são desviados pelo ar aquecido localizado próximo ao asfalto e atingem o olho do observador. Este efeito, conhecido como miragem, é comum em desertos, mas também pode ocorrer no mar, só que neste caso a água resfria o ar e a imagem é invertida.

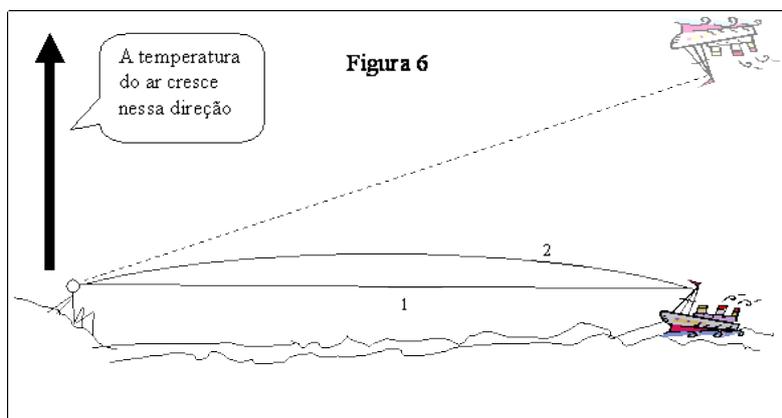


Figura 2.11 – Efeito Miragem - <http://axpfep1.if.usp.br/~otaviano/miragens.html>

## Comunicações ópticas

Na transmissão de informações por meio da luz, o meio no qual o raio se propaga desempenha um papel importante. Na transmissão de micro-ondas por visada direta, onde o sinal gerado por uma antena parabólica é captado por outra, flutuações na atmosfera produzem ruído no sinal transmitido devido à instabilidade na trajetória dos raios, que por vezes não atingem perfeitamente a antena receptora. Nas comunicações via fibra óptica a luz gerada por um laser semiconductor fica confinada principalmente no núcleo, que possui índice de refração maior que a casca. Assim, a variação do índice de refração novamente modifica a propagação dos raios. A própria focalização de luz em fibras ópticas é muitas vezes realizada por uma lente do tipo GRIN (gradiente

índice), cujo índice de refração diminui radialmente e de forma contínua. A propagação de luz nestes meios do tipo lente será discutida após introduzirmos as ferramentas matemáticas necessárias.

## Efeitos auto-induzidos

Ocorrem quando um feixe de luz laser percorre um meio do tipo Kerr, cujo índice de refração depende da intensidade de acordo com:  $n(I) = n_0 + n_2 I$ , onde  $n_0$  é o índice de refração para baixas intensidades e  $n_2$  é chamado de índice de refração não linear. (O efeito Kerr óptico, ou efeito Kerr CA é o caso especial no qual o campo elétrico é devido à própria luz, e somente se manifesta com raios de intensidade muito alta tais como aqueles oriundos de um [laser](#). O quadrado do campo elétrico produz um índice de refração lentamente variável o qual então age sobre a própria luz. Esta dependência da intensidade é responsável pelos efeitos [ópticos não lineares](#) da [auto-focalização](#) e da [auto modulação de fase](#), e esta é a base para [lentes de Kerr travadas por modulação](#).) O feixe de luz laser possui em geral um perfil transversal de intensidade do tipo gaussiano, que modifica o índice de refração na direção radial, produzindo o efeito de uma lente. A origem de  $n_2$  pode ter natureza térmica ou eletrônica e sua determinação constitui um assunto de pesquisa atual. Em comunicações por fibras ópticas a presença deste tipo de efeito pode compensar a dispersão da velocidade de grupo e dar origem a sólitons. Trataremos deste assunto brevemente no [Cap. 5](#).

Além dos exemplos citados acima, o estudo da propagação de luz em meios não homogêneos é importante do ponto de vista histórico, pois permite entender como a mecânica ondulatória foi introduzida por Schrödinger. Mesmo assim, o material relativo a este tópico está disperso em vários livros e artigos, e sua compilação justifica a existência do presente texto.

Do ponto de vista teórico, a propagação de luz em meios não homogêneos pode ser tratada de quatro maneiras distintas, que cronologicamente seguem a seguinte ordem:

- a) lei de Snell generalizada,
- b) princípio de Fermat,
- c) equação do eikonal e
- d) limite clássico da equação de Schrödinger.

## Cap.3 – ONDAS

Define-se uma onda como qualquer perturbação que atravesse um determinado meio sem transportar partículas desse meio. Por exemplo, as ondas do mar andam sobre a sua superfície sem entanto carregar as moléculas de água deste junto com ela. Na corda abaixo o pulso de onda viaja sobre esta e, no entanto a corda continua presa ou fixa entre a parede e a mão da pessoa que a segura. O que vemos se deslocar sobre o meio é o perfil da onda, ou seja, a perturbação sobre este.

Do ponto de vista do meio em que as ondas se propagam, temos as ondas mecânicas que exigem um meio material (um metal, por exemplo) para se propagarem, e as ondas eletromagnéticas que não requerem a existência de tal meio para se propagarem. Ou seja, elas se propagam no vácuo.

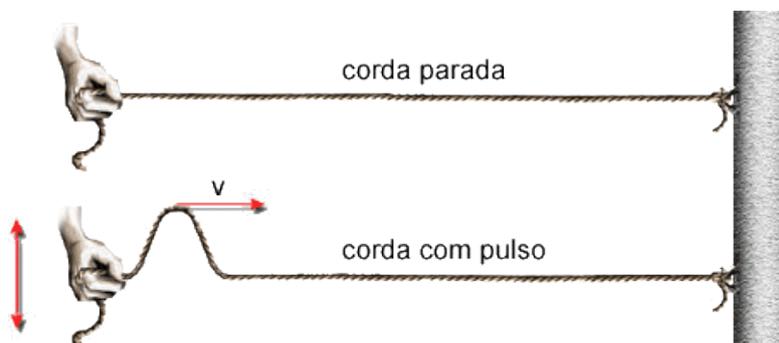


Fig. 3.1 - Ilustração de um pulso propagando-se numa corda.

Outro modo de se classificar as ondas é quanto à direção do deslocamento das partículas do meio em relação à direção de propagação da onda. Se as partículas se deslocam na direção perpendicular à direção de propagação da onda temos uma onda transversal, ver figura acima. Se o deslocamento for na mesma direção da onda temos uma onda longitudinal.

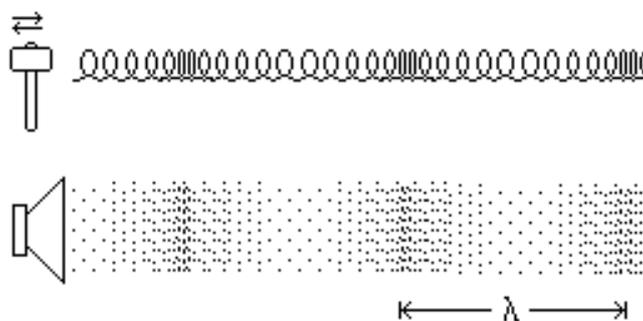


Fig.3.2 – Exemplo de ondas Longitudinais.

Um pulso ou uma perturbação que propague na direção do eixo x e no sentido positivo do eixo (coordenadas crescentes com o tempo) pode ser representado por uma função f de x e t (o perfil da onda), que depende da coordenada x e do tempo da seguinte forma:

$$f(x,t) = f(x-vt) \quad (0.1)$$

Onde  $v$  é uma constante que corresponde à velocidade de propagação da onda. A dependência funcional de f com o tempo t é a de uma equação horária do movimento ( $S = S_0 + V \cdot t$ ) que descreve a posição de um ponto do pulso, deslocamento vertical, no decorrer do tempo.

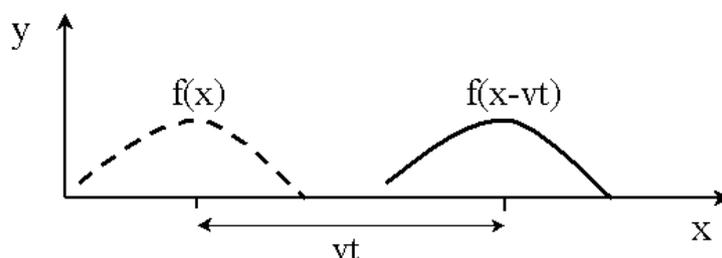


Fig.3.4 - FUNÇÃO PERFIL

(<http://www.if.ufrj.br/teaching/fis2/ondas1/ondulatorio.html>)

A velocidade de propagação de uma onda depende das propriedades do meio no qual este se propaga. Por exemplo, consideremos uma corda com densidade linear de massa igual a  $\mu$  e sujeita a uma tensão T. Neste caso a onda sobre a corda tem uma velocidade que é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (0.2)$$

Ou seja, quanto mais tracionada esteja a corda mais rápido a onda viaja e quanto mais pesada a corda (inércia) menor a sua velocidade.

Um pulso, ou uma perturbação, que se propague na direção do eixo x, mas no sentido negativo do eixo (coordenadas decrescentes), com um perfil descrito pela função g é descrito pela função de x e t

$$g(x,t) = g(x+vt) \quad (0.3)$$

As funções f e g são aquelas adequadas para descrever o perfil da onda considerada. Um exemplo simples de uma onda é aquela que podemos produzir puxando para cima a extremidade de uma corda presa por uma das extremidades a uma parede e depois a soltando. Ver figura acima.

### 3.1 - ONDAS HARMÔNICAS

As ondas harmônicas se constituem num tipo especial de ondas. O que as caracterizam é o fato delas se repetirem periodicamente e terem uma forma senoidal. Elas são produzidas, por exemplo, esticando-se uma corda, e depois puxando-a para cima e para baixo de uma mesma distância e com mesma velocidade até que se produza uma figura estacionária, como a abaixo. Uma onda harmônica não precisa ser estacionária, ela pode propagar indefinidamente.

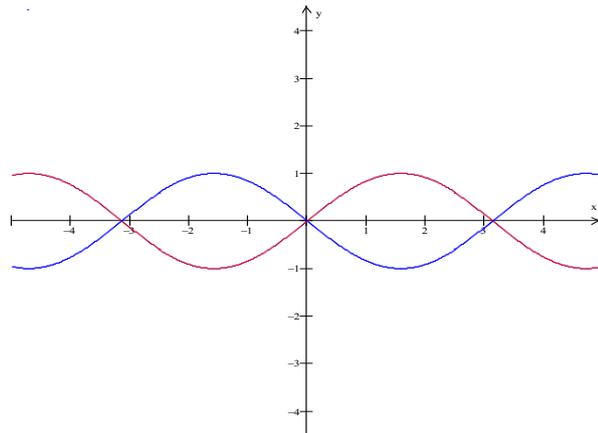


Figura 3.1 – Exemplo de onda harmônica.

Elas são caracterizadas por uma função que descreve o perfil da onda na forma seno ou cosseno. Ou seja, para uma onda harmônica escrevemos:

$$f(x - v.t) = A.\cos(\tilde{k}(x - v.t)) \quad \text{ou} \quad [A.\sin(\tilde{k}(x - v.t))] \quad (0.4)$$

Onde A na equação acima é a amplitude da onda, pois é o máximo da função f, e k é uma constante que caracteriza a onda harmônica e que é conhecida pelo estranho nome de vetor de onda. Logo, o fator A está relacionado com a intensidade do impulso que fornecemos à corda e k com o seu deslocamento na horizontal. Outra forma de escrever a expressão acima e que é bastante comum é na forma:

$$f(x - v.t) = A.\cos(\tilde{k}x - w.t) \quad \text{ou} \quad [A.\sin(\tilde{k}x - w.t)] \quad (0.5)$$

A expressão acima parece introduzir uma nova constante para descrever a onda (a constante w). Esse, no entanto, não é o caso uma vez que comparando w e v concluímos que essa constante é dada por:

$$\tilde{k}.v = w \quad (0.6)$$

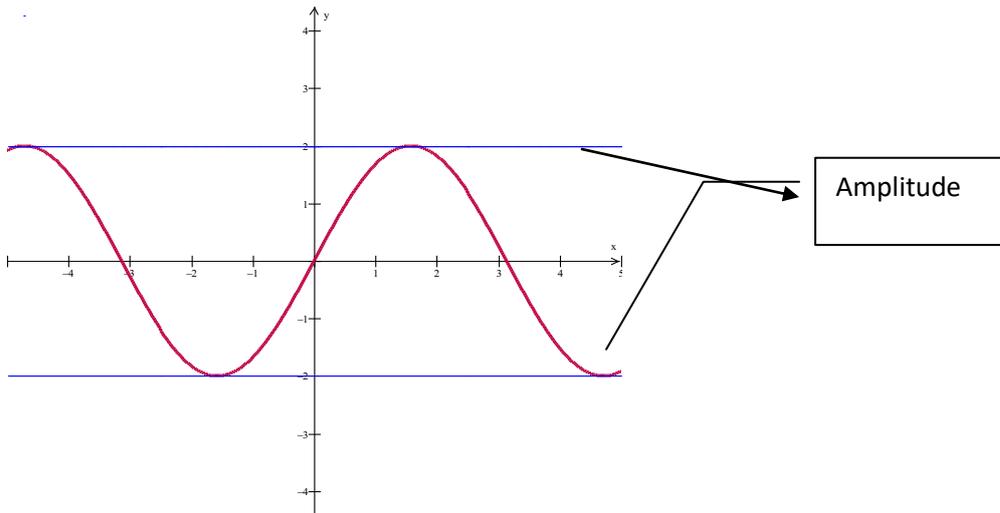


Figura 3.2 – Definição da amplitude de uma onda.

Veremos mais tarde que  $\omega$  é a frequência angular da onda. Numa onda harmônica é usual representar o seu perfil através da função exponencial com argumento puramente imaginário. Ou seja, representamos a onda pela função

$$f(x - vt) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (0.7)$$

A função exponencial ( $e^x$ ) é apenas uma forma econômica de representar tanto a função seno quanto a função cosseno. Isso porque a seguinte identidade é válida para números complexos:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0.8)$$

Tomando-se a parte real ou a parte imaginária de (1.7) teremos as ondas harmônicas da expressão (1.4).

O que é notável, observando-se (1.5) é que uma onda harmônica tem um perfil que se repete no espaço e no tempo. Isso decorre do fato de que, depois de um intervalo de tempo  $T$  conhecido como o período da onda harmônica, dado por

$$\boxed{\omega T = 2\pi} \quad (0.9)$$

a onda se torna indistinguível da onda inicial. Portanto, de (1.6) segue que o período é dado em função de  $k$  e  $v$  por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv} \quad (0.10)$$

Define-se a frequência ( $\nu$ ) da onda como o inverso do período:

$$\nu \equiv \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} \quad (0.11)$$

A unidade de frequência mais utilizada para ondas é o Hertz, definido como o inverso do segundo.

Depois de percorrido um intervalo de distancia no espaço, denominado de um comprimento de onda (aqui representado pela letra  $\lambda$ ), a onda se torna indistinguível daquela de quando se iniciou o percurso. Isso ocorre para valores de  $\lambda$  tais que:

$$k\lambda = 2\pi \quad (0.12)$$

Assim, o comprimento da onda nada mais é do que a distancia entre, por exemplo, dois máximos da onda (vide figura abaixo).

De (1.11) e (1.12), nota-se que existe uma relação bem simples entre a velocidade da onda, a frequência e o comprimento de onda:

$$v = \lambda\nu \quad (0.13)$$

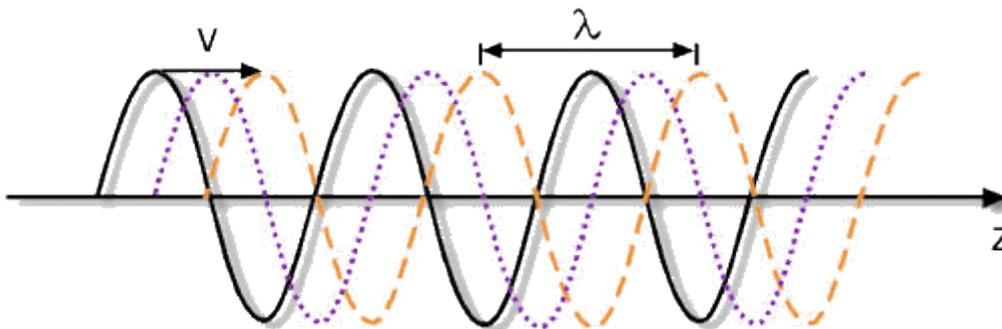


Figura 3.3 – Definição de comprimento de onda.

### 3.2 Princípio de Superposição

Outra propriedade muito importante das ondas é que, ao contrário das partículas materiais, estas podem se cruzar, se chocar, sem que se alterem as suas propriedades. Ou seja, duas ondas viajando sobre uma corda ao se cruzar vão produzir momentaneamente uma terceira onda, e quando estas deixarem de ocupar a mesma região da corda voltarão a ser as mesmas ondas. Ver exemplo abaixo.

Dizendo de outro modo, duas ou mais ondas podem se cruzar na mesma região do espaço movendo-se independentemente uma da outra. O deslocamento de qualquer partícula do meio em um dado instante é a soma dos deslocamentos que seriam produzidos pelas ondas individualmente.

Esse constitui o princípio de superposição e vale para ondas em meios elásticos se as forças de restauração forem proporcionais às deformações.

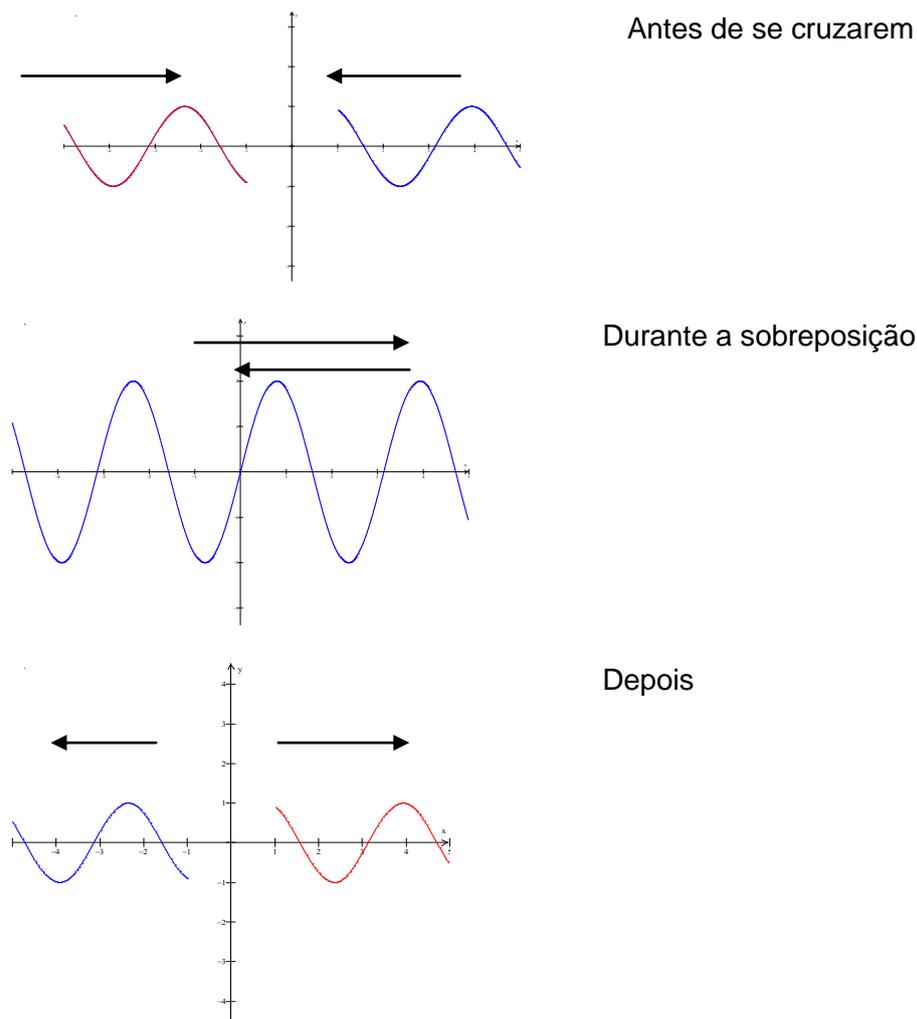


Figura 3.4 – Ilustração do princípio de superposição

Se tivermos  $n$  ( $=2,3,4..$ ) ondas com amplitudes  $A_i$  e defasadas de  $d_i$  entre si e se sobrepondo tem-se que a onda resultante será a soma algébrica de todas elas. Usando a notação abreviada para indicar a função de onda  $u_n$  resultante temos:

$$U_n = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n A_i \cos(x - w_i \cdot t + d_i) \quad (1.14)$$

Inversamente, qualquer movimento ondulatório pode ser analisado como combinação de movimentos ondulatórios simples (harmônicos, por exemplo). Aplicação disto são os filtros de ondas e os seletores de frequência.

Os efeitos físicos associados à superposição de duas ou mais ondas são chamados de interferência.

Como exemplo clássico considere duas ondas de mesma direção e sentido, mas uma atrasada em relação à outra de uma fase  $d$ . Se elas possuem frequências, amplitudes e velocidades iguais têm-se:

$$u_1(x,t) = A \text{ sen } ( kx - \omega t - d ) \quad (1.15a)$$

$$u_2(x,t) = A \text{ sen } ( kx - \omega t ) \quad (1.15b)$$

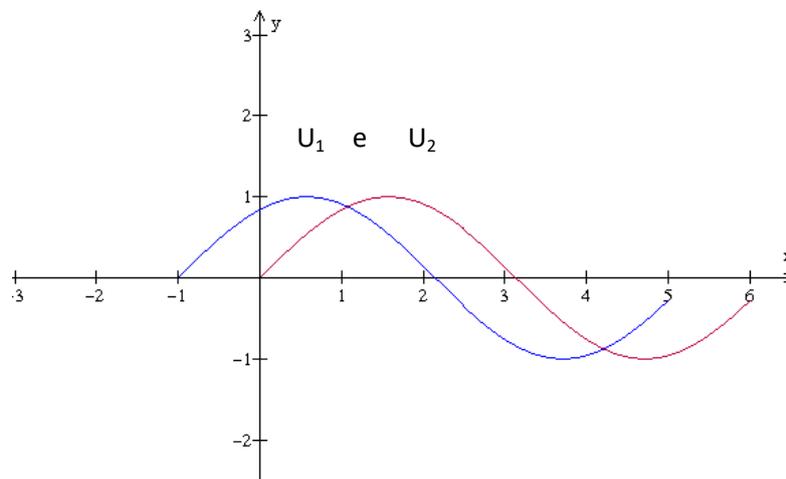


Figura 3.4 – Exemplo de ondas defasadas entre si.

Numa dada posição ( $x$  fixo),  $u_1$  e  $u_2$  representam dois movimentos harmônicos simples defasados por um intervalo de tempo  $d / \omega$ . A onda resultante da superposição de  $u_1$  e  $u_2$  é dada por:

$$u_1(x,t) + u_2(x,t) = A [ \text{sen } ( kx - \omega t - d ) + \text{sen } ( kx - \omega t ) ] \quad (1.16a)$$

Da relação trigonométrica:

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen } [ ( A + B ) / 2 ] \cos [ ( A - B ) / 2 ] \quad (1.17)$$

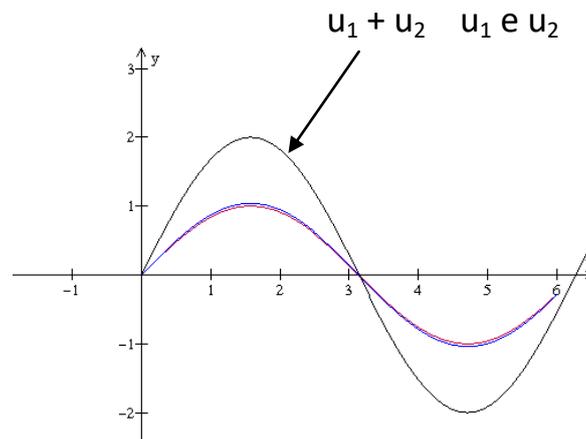
a expressão acima fica:

$$u_1(x,t) + u_2(x,t) = [ 2A \cos ( d / 2 ) ] \text{ sen } ( kx - \omega t - d / 2 ) \quad (1.16b)$$

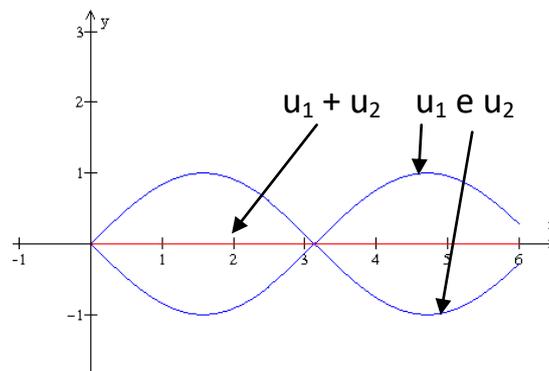
Portanto, a onda resultante é uma onda com mesma frequência angular

onde  $w$  que as ondas descritas por  $u_1$  e  $u_2$  e com fase  $d/2$ . Mas a sua amplitude é dada pelo fator  $2A \cos(d/2)$ .

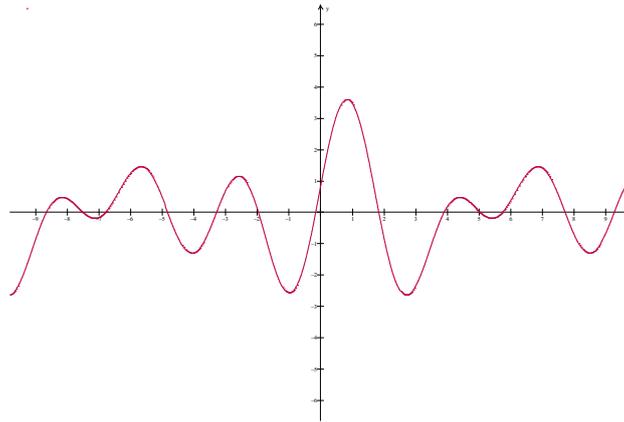
Para  $d = 2\pi n$  ( $n$  inteiro), ou seja, para  $y_1 = y_2$  a amplitude da onda resultante vale  $2A$  e diz-se que existe interferência construtiva entre  $y_1$  e  $y_2$  (condição de máximo). É muito comum dizer-se que as ondas estão em fase quando esta difere de  $d = 2\pi n$  ( $n$  inteiro).



Para  $d = (n+1/2)\pi$ , ou seja, para  $u_1 = -u_2$ , a amplitude da onda resultante vale zero e diz-se que existe interferência destrutiva entre  $u_1$  e  $u_2$  (condição de mínimo). Diz-se que as ondas estão fora de fase quando esta difere de  $d = \pi(n+1/2)$  ( $n$  inteiro).



De modo geral, pode haver interferência entre ondas com quaisquer frequências e/ou amplitudes e com qualquer diferença de fase. Nesse caso não há uma expressão tão simples como a 1.16b e a onda resultante em geral não é harmônica. Veja o caso simples da função  $y = \text{sen}(x+1) + 1.5\text{sen}(2x) + 1.2\text{sen}(1.5x)$ . Ver figura abaixo.



### 3.3 Equação das Ondas

Pode-se mostrar, ver Butkov, Arfken, Nussenzveig e outros, que o análogo da equação dinâmica Newtoniana,  $F = m \cdot d^2x/dt^2$ , para a propagação de uma onda em um meio material e homogêneo deve ser uma equação linear que satisfaça o princípio da superposição e de segunda ordem com respeito às coordenadas do espaço e do tempo ( $d^2 \cos(x) = -\cos(x)$ ). Para ondas se propagando ao longo do eixo  $x$ , tal equação se escreve:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

Onde o parâmetro  $v$  aparecendo na equação acima é a velocidade de propagação da onda no meio. Se substituirmos a função de onda  $u(x,t) = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$  na equação de onda e aplicarmos as derivadas parciais, temos:

$$\frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} = -k^2 u(x,t) \quad e \quad \frac{d^2 u(x,t)}{dt^2} = -\omega^2 u(x,t) \quad (1.18a)$$

Aplicando a igualdade aos dois termos temos as relações já vistas entre  $v$ ,  $k$  e  $\omega$ .

$$v = \omega/k = v \cdot \lambda \quad (1.18b)$$

O fato da equação ser linear, significa apenas que se  $u_1$  e  $u_2$  forem soluções da equação de ondas então uma combinação linear das duas soluções também o será. Isto é, a combinação de soluções:

$$u(x,t) = a_1 u_1(x,t) + a_2 u_2(x,t) \quad (1.19)$$

também é uma solução. Em particular a soma de duas soluções envolvendo ondas se propagando em direções opostas também é uma solução da equação de ondas, e portanto é, igualmente, um onda:

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

Nem todas as ondas são ondas lineares. Essas ondas são apenas as mais simples e que, além disso, são de grande interesse em várias aplicações.

Para uma onda se propagando no espaço tridimensional a equação das ondas se escreve como:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

As ondas acima são ditas ondas escalares. No eletromagnetismo estudaremos ondas vetoriais.

### 3.4 ONDAS PLANAS

O análogo, em três dimensões, de uma onda harmônica que se propaga ao longo do eixo x ( vide equação (1.5) ), é:

$$f(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - w.t)} \quad (1.21a)$$

Onde  $\vec{k}$  é o vetor de onda, e A é a amplitude da onda. A expressão (1.21) descreve uma onda que se propaga na direção dada pelo vetor  $\vec{k}$ . Uma onda que se propaga no sentido oposto será escrita como:

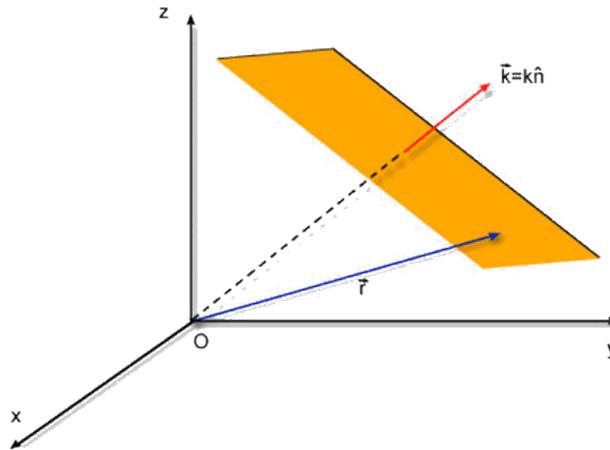
$$f(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + w.t)} \quad (1.21b)$$

Tendo em vista que o lugar geométrico dos pontos para os quais

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante} \quad (1.22)$$

é um plano, denomina-se uma onda da forma  , como uma onda plana.

A característica mais notável de uma onda plana é que sua fase é a mesma para cada superfície plana e esta é dada pela expressão (1.22). Vide figura abaixo.



Para uma onda plana vale, substituindo-se a solução (1.21a) em (1.20), a seguinte relação:

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (1.23)$$

que é uma relação análoga a (1.18b), mas para 3 dimensões.

## Cap.04 - Ondas Eletromagnéticas

James Clerk Maxwell deu a mais significativa contribuição à ciência no campo da eletricidade e do magnetismo ao unificá-las em uma única teoria do eletromagnetismo. Em 1864 Maxwell sugeriu que se pode encontrar a descrição de todos os fenômenos eletromagnéticos a partir das soluções de um conjunto de 4 equações a derivadas parciais de primeira ordem no tempo e no espaço. Essas equações são hoje conhecidas como as Equações de Maxwell. Elas são equações para os campos elétricos e magnéticos uma vez conhecidas as distribuições das cargas elétricas e das correntes.

Animação → [http://www.walter-fendt.de/ph14br/emwave\\_br.htm](http://www.walter-fendt.de/ph14br/emwave_br.htm)

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/oldjava/emWave/emWave-port.html>

Maxwell foi um pouco mais além da fenomenologia das teorias da eletricidade e do magnetismo conhecido àquela época e acrescentou um novo termo a uma das equações, termo esse conhecido como a corrente de deslocamento tornando a lei de Ampère mais geral. Esse novo termo, a

corrente de deslocamento é tal que prevê o surgimento de um campo magnético pelo mero fato do campo elétrico variar com o tempo. Ou seja, um campo elétrico variável tem o mesmo papel que uma corrente elétrica. Estas equações, conhecidas atualmente como equações de Maxwell, estão discutidas em detalhes nos textos básicos de eletromagnetismo (ver referência 4.1). Elas são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.24a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.24b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad (1.24c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.24d)$$

onde o sistema internacional (MKSA) foi adotado. O último termo da eq. (1.24d) representa a corrente de deslocamento introduzida por Maxwell.

Cada uma destas equações corresponde a uma lei física descoberta empiricamente. De acordo com a ordem usada acima temos:

1. lei de Gauss, diz que o fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada é igual a quantidade de carga contida dentro dela.
2. A equação 1.24b diz que não existe monopolo magnético.
3. A equação 1.24c é a lei da indução de Faraday que afirma que a variação temporal do campo magnético  $\vec{B}$  gera uma circulação do campo elétrico  $\vec{E}$ .
4. A equação 1.24d é a lei de Ampère-Maxwell diz que a variação temporal do campo elétrico  $\vec{E}$  gera uma circulação do campo magnético  $\vec{B}$ .

O significado das grandezas que aparecem neste conjunto de equações é o usual:  $\vec{E}$  é o campo elétrico,  $\vec{B}$  é a indução magnética,  $\rho$  é a densidade de portadores livres,  $\vec{J}$  é a densidade de corrente devida aos portadores livres,  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  é o deslocamento elétrico e  $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{M}$  é o campo magnético. Introduzimos assim, a polarização elétrica  $P$  e a magnetização  $M$ , que correspondem à resposta do meio devido à presença dos campos elétrico e magnético, respectivamente. As constantes  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m e  $\mu_0 = 4 \times 10^{-7}$  H/m, determinadas empiricamente, são denominadas respectivamente de permissividade e permeabilidade do vácuo. Analisando com um pouco de mais detalhes temos que:

### Simetria das Equações

Olhando as quatro equações duas a duas – a 1ª com a 3ª e a 2ª com a 4ª - temos que elas diferem pelo fato de que nas primeiras as cargas estão em repouso e na segunda estas estão em movimento. Logo, se tomarmos uma carga em movimento e observá-la em um RI que se move com esta (mesma velocidade) temos que o campo magnético terá que se tornar em elétrico. Ou seja, estes devem ser duas faces de uma mesma grandeza, denominada de campo eletromagnético.

Como dissemos acima, as equações de Maxwell podem ser combinadas de forma a gerar uma nova equação que descreve a onda eletromagnética. Primeiramente vamos considerar o caso de uma onda magnética propagando no vácuo. Neste caso temos que os vetores polarização  $\mathbf{P}$  e de magnetização serão nulos. Isto é

$$\mathbf{P} = 0 \rightarrow \vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = 0 \rightarrow \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}} / \mu_0$$

As ondas eletromagnéticas num meio livre e homogêneo, isto é, sem cargas e correntes temos  $\rho = \mathbf{J} = 0$ ,  $\mu$  e  $\epsilon$  não dependem da posição.

As equações de Maxwell no vácuo são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \tag{1.25a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{1.25b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\partial \vec{\mathbf{B}} / \partial t \tag{1.25c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{1.25d}$$

Tomando-se o rotacional da eq. (1.25c) temos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) = -\vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}})$$

Usando as eq.'s (1.25d e 1.25a) e a identidade vetorial  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}}$  obtemos a equação de ondas:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathbf{D}} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \tag{1.26}$$

Analogamente, tomando o rotacional da lei de Ampère-Maxwell (1.25d) e usando as eq. (1.25b) e (1.25c), obtemos uma equação similar para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (1.27)$$

Se considerarmos a propagação em apenas uma dimensão (apenas na direção z, por exemplo), o Laplaciano se transforma numa derivada segunda com relação a z, e assim as eq. (1.26) e (1.27) assumem a forma da equação de ondas dada por (1.17). Este tipo de equação já era conhecido na época, de forma que Maxwell pode concluir que se tratava de uma onda com velocidade de propagação  $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ .

Tais ondas recebem o nome de ondas eletromagnéticas. Sua velocidade de propagação é dada por:

$$v = \sqrt{\mu\varepsilon} \quad (1.28a)$$

Onde  $\mu$  e  $\varepsilon$  estão associadas a propriedades magnéticas ( $\mu$ ) e elétricas ( $\varepsilon$ ) do meio. São as constantes denominadas de permeabilidade magnética e permitividade elétrica do meio. As ondas eletromagnéticas têm, portanto, uma velocidade de propagação que depende das propriedades eletromagnéticas do meio. Portanto, os campos elétrico e magnético podem se propagar como ondas no espaço. Os campos são os componentes da onda. A razão para a sua propagação mesmo no vácuo tem a haver com o fenômeno da indução no eletromagnetismo. Um campo elétrico variando com o tempo induz um campo magnético variando com o tempo e esse último ao variar induz um campo elétrico variando com o tempo e assim sucessivamente.

É interessante enfatizar que quando estas equações foram obtidas pouco se conhecia sobre a natureza da luz. Apenas quando Maxwell substituiu os valores de  $\mu$  e  $\varepsilon$ , conhecidos empiricamente através de medidas de capacitância e indutância, obteve-se que a onda eletromagnética tinha uma velocidade de propagação igual à da luz, e assim pode ser feito o relacionamento ou unificação entre a óptica e o eletromagnetismo.

$$c = v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (1.28b)$$

No caso tridimensional, as equações (1.26) e (1.27) são cada uma um conjunto de três equações para cada uma das componentes das coordenadas, isto é:

$$\nabla^2 E_x = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (1.29a)$$

$$\nabla^2 E_y = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (1.29b)$$

$$\nabla^2 E_z = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad (1.29c)$$

Existe ainda um conjunto de equações similares para o campo magnético. Todas são equações diferenciais lineares de segunda ordem, que podem ter uma infinidade de soluções, dependendo das condições de contorno impostas pela geometria de cada situação particular. Outra forma de escrever as equações de Maxwell é (forma explícita):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}(x,y,z,t)}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}(x,y,z,t)}{\partial t^2} \quad (1.30a)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}(x,y,z,t)}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}(x,y,z,t)}{\partial t^2} \quad (1.30b)$$

A análise de Maxwell lhe permitiu concluir que:

*The agreement of the results seems to show that light and magnetism are affections of the same substance, and that light is an electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws.*

Dessa forma Maxwell percebeu que a descrição dos fenômenos associados à luz podem ser entendidos ou descritos a partir do eletromagnetismo. Deu-se assim o que denominamos hoje de unificação do eletromagnetismo com a óptica.

Uma onda eletromagnética harmônica plana é também uma onda monocromática. Isto é uma onda com uma frequência bem definida. Uma onda eletromagnética monocromática é descrita pelos campos:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \quad (1.31a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \quad (1.31b)$$

Onde  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$  são as amplitudes dos campos elétrico e magnético, respectivamente.

## Vetor de Poynting e o Transporte de Energia

Ondas eletromagnéticas transportam energia e momento os quais são transferidos à matéria quando essas ondas interagem com ela. Este fenômeno é de grande importância e tem sido usado em diferentes aplicações tecnológicas, como o transporte de informações e de energia de um ponto para o outro.

Sabemos que os capacitores e os indutores são elementos em um circuito que têm a propriedade de armazenar campo elétrico e magnético. Isto significa que existe no interior do capacitor e do indutor energia eletromagnética armazenada. Sabemos que a energia  $U_C$  em um capacitor pode ser escrita em função da capacitância  $C$  e da diferença de potencial entre as placas segundo a expressão abaixo:

$$U_E = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (1.32a)$$

Como a capacitância  $C$  só depende da geometria do material e de sua constante dielétrica  $\epsilon$ , pode se demonstrar que [ver ref]:

$$u_E = \frac{U_E}{vol} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{\text{energia}}{\text{volume}} \quad (1.32b)$$

Do mesmo modo [ver ref] temos que a energia magnética armazenada em um indutor em função do campo magnético associado tem a forma:

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad (1.33a)$$

Como a indutância pode ser expressas em termos das propriedades geométricas do indutor temos:

$$u_B = \frac{U_B}{vol} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\text{energia}}{\text{volume}} \quad (1.33b)$$

Podemos generalizar os resultados acima e dizer que a energia, por unidade de volume, armazenada em campos elétricos e magnéticos são proporcionais ao quadrado das amplitudes dos campos  $E$  e  $B$ , isto é.

$$\mathbf{u}_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{u}_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (1.34a)$$

Deste modo temos que a densidade volumétrica da energia eletromagnética é dada por:

$$u = \frac{U}{vol} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\text{energia}}{\text{volume}} \quad (1.34b)$$

Então, para qualquer volume dado, a energia total armazenada em forma de campo elétrico e magnético é igual a integral das densidades de energias em todo volume,

$$U = \int \left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right] dV \quad (1.35)$$

Vejamos como esta energia se propaga no espaço. Como dissemos acima uma onda eletromagnética se propaga porque os seus campos elétrico e magnético se transformam um no outro. Ver eq's 1.24c e 1.24d. Para não ficarmos carregando o sinal de integral vamos estudar a variação em função do tempo da densidade de energia, isto é, tomemos a derivada temporal de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} B^2 \right) = \epsilon_0 E \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial}{\partial t} B$$

Usando as identidades 1.24c e 1.24d podemos escrever a equação acima como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon_0 E \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial}{\partial t} B = \frac{1}{\mu_0} [E \cdot \nabla \times B - B \cdot \nabla \times E] - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (1.36a)$$

Usando a identidade vetorial

$$-E \cdot \nabla \times B + B \cdot \nabla \times E = \nabla \cdot (E \times B)$$

e denominando  $S = \mu_0^{-1} E \times B$  de vetor de Poynting temos:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div} S \quad (1.36b)$$

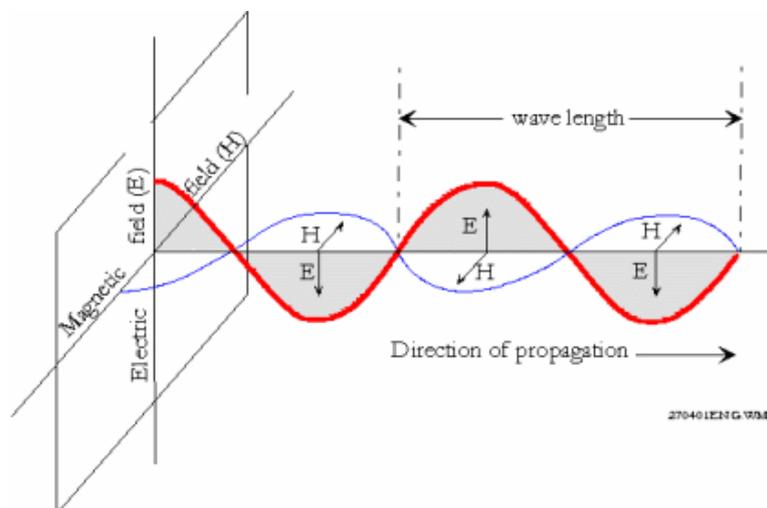
Temos que o 1º termo de 1.36b fornece o trabalho por unidade de tempo que o campo elétrico E realiza sobre as cargas livres no vácuo. [ref]

$$dT/dt = q \cdot E \cdot ds/dt = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

## ONDAS TRANSVERSAIS

Pode-se classificar as ondas em duas grandes categorias quanto à direção de propagação em relação à direção na qual a onda oscila. Quanto a esse aspecto temos dois tipos de ondas: Ondas Longitudinais e Ondas Transversais. Nas ondas longitudinais, as ondas oscilam na mesma direção de propagação da onda. As ondas Transversais são aquelas para as quais as oscilações ocorrem numa direção que é ortogonal à direção de propagação da onda.

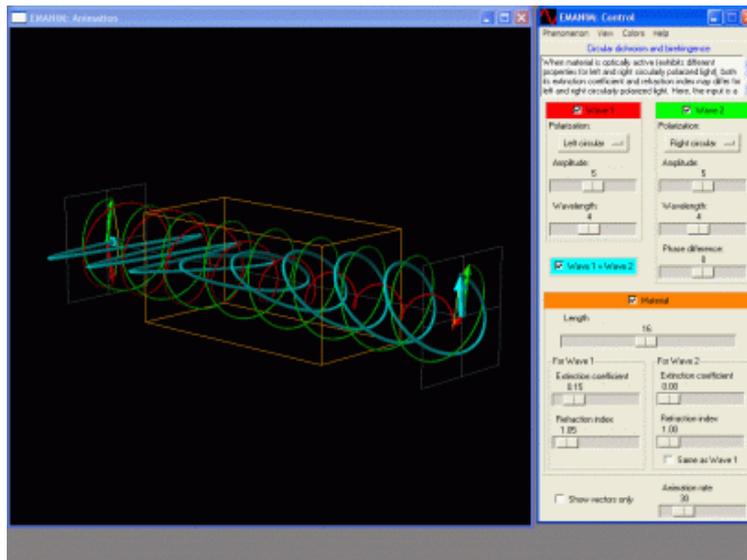
Pode se provar que as ondas eletromagnéticas são ondas transversais. Isto é, enquanto as onda se propagam, por exemplo, ao longo do eixo  $x$  os campos elétricos e magnéticos oscilam ao longo do plano  $y-z$  que é um plano perpendicular a essa direção . Vide figura abaixo.



## POLARIZAÇÃO

Polarização de uma onda eletromagnética diz respeito ao comportamento da direção dos campos elétricos e magnéticos quando analisado num plano perpendicular ao sentido de propagação da onda. As ondas eletromagnéticas podem ser polarizadas de duas formas distintas.

No caso de uma onda plano polarizada o campo elétrico oscila sempre num plano. O mesmo ocorrerá, naturalmente, com o campo magnético. Ele oscilará nesse caso num outro plano perpendicular ao plano de oscilações do campo elétrico. Esses dois planos contêm as possíveis direções do campo elétrico (e do campo magnético) e da direção de propagação da onda.



Uma onda circularmente polarizada é tal que á medida em que a onda se propaga o campo elétrico executa um movimento tal que, observando-se o seu comportamento a partir do plano perpendicular ao movimento, seu movimento será semelhante aquele do movimento circular uniforme.

## SUPERPOSIÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A superposição de duas ondas gera uma nova onda. A superposição de duas ondas monocromáticas não é uma onda monocromática. Para a superposição de ondas monocromáticas escrevemos:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum \vec{E}_{i0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum \vec{B}_{i0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)}$$

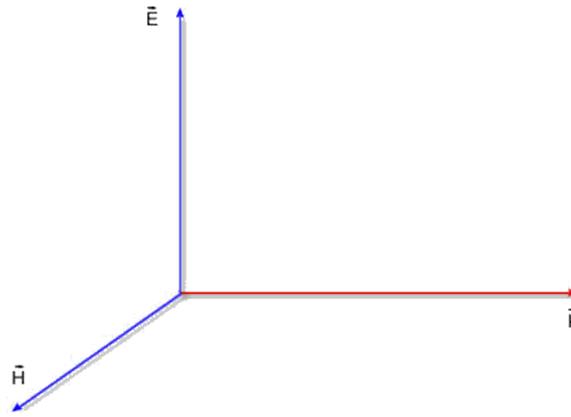
Para a superposição de um número muito grande de ondas, que se aproxime de um contínuo, substituímos a soma por uma integral sobre as frequências, isto é:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r} + \omega t)} d\omega$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \int \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r} + \omega t)} d\omega$$

A partir das equações de Maxwell, e das soluções propostas acima, pode-se verificar que os vetores  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$  e  $\vec{k}_0$  são perpendiculares entre si. Isto é:

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{E}_0 \cdot \vec{k}_0 = 0, \quad \vec{B}_0 \cdot \vec{k}_0 = 0$$



Assim, um aspecto importante a respeito das ondas eletromagnéticas harmônicas, é que o campo elétrico oscila numa direção que é ortogonal à direção na qual oscila o campo magnético.

As ondas eletromagnéticas foram previstas pela primeira vez por Maxwell e observadas por Heinrich Hertz. Como as demais ondas, as ondas eletromagnéticas podem ser caracterizadas pela frequência ou, equivalentemente, pelo seu comprimento de onda. O conjunto de frequências define o espectro da radiação.

Denominamos de luz a uma parte do espectro eletromagnético. São as ondas eletromagnéticas cujos comprimentos de onda estão compreendidos no intervalo entre 400 e 700 nm (nanômetros). A luz visível é, assim, apenas uma onda eletromagnética. Outros tipos são igualmente importantes

**Ondas de Rádio** são as ondas EM de menor frequência dentro do espectro eletromagnético. Parte desse espectro é utilizado para comunicações em geral (via rádio e celulares). As estações de rádio FM operam num domínio de frequências próximo de  $10^8$  Hz. As estações de rádio AM operam em frequências próximas de  $10^6$  Hz. Ondas de rádio têm frequência de até 300 MHz (megahertz).

**Microondas** é um subconjunto das ondas de rádio. Têm frequências compreendidas no intervalo entre 300 MHz e 300 GHz. As microondas têm três características importantes que definem a sua utilidade na fabricação de fornos de microondas: elas são absorvidas pelos alimentos em geral, são refletidas por metais e conseguem atravessar uma gama bem grande de materiais que usamos como embalagens de alimentos (vidro, papel, plástico, etc). As microondas têm utilizações industriais. São utilizadas em radares da polícia rodoviária e em comunicações.

**Radiação infravermelha** são as ondas com frequências próximas do espectro visível. Possui frequências menores que a luz visível de tom avermelhado. O comprimento de onda estaria no domínio entre 700 nm e 1mm.

Existem muitas aplicações para a radiação infravermelha. Recentemente ela tem sido utilizada em equipamentos para visão noturna, isto é, quando não

há luz suficiente. Um corpo (como o corpo humano) a  $37^{\circ}C$  emite radiação eletromagnética na região infravermelha. Assim basta detectar a radiação emitida e traduzi-la em termos de imagens numa tela. A técnica é de fazer o contraste entre objetos, isto é, os objetos mais quentes aparecem com tons diferentes de objetos mais frios. Radiação infravermelha é também utilizada em redes sem fio e aquecimento de objetos (como retirar gelo das asas de um avião antes da decolagem).

**Radiação ultravioleta:** Também são ondas com frequências próximas do espectro visível, mas na outra extremidade do espectro em relação ao vermelho. A frequência dessa radiação está acima daquela associada à luz visível de tom violeta.

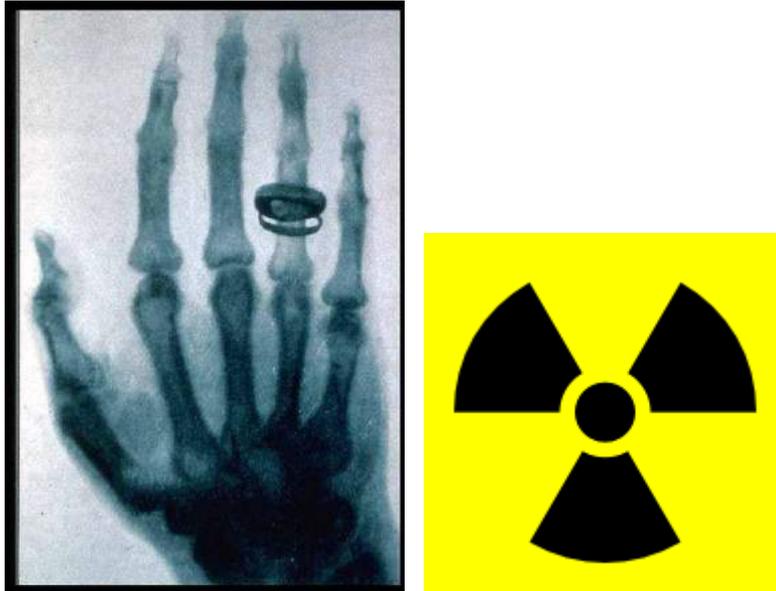
Os efeitos dos raios ultravioletas são sentidos quando, por exemplo, vamos à praia. O corpo fica bronzeado como uma reação natural, fisiológica, à exposição da pele à radiação ultravioleta proveniente do Sol. Como resposta contra a radiação ultravioleta o corpo produz a melanina. Essa substância gera a tão apreciada coloração ao corpo humano. Desnecessário dizer que exposição excessiva à radiação UV podem acarretar consequências desastrosas do ponto de vista da saúde humana. Por exemplo, a pele, os olhos e o sistema imune podem ter problemas agudos e às vezes crônicos se alguém for exposto à radiação UV excessiva.

Há várias aplicações para as radiações ultravioletas. As lâmpadas ultravioletas podem ser utilizadas para esterilizar ferramentas em hospitais e laboratórios. Radiação UV pode ser útil no processo de pasteurização de sucos de fruta.

**Raios-x** é a radiação cujos fótons que a compõem têm as mais altas energias. O espectro do raio-x se confunde com os dos raios  $\gamma$ . A única diferença está na forma como estes são produzidos. Os raios-x são produzidos em máquinas de raio-x e em aceleradores de partículas. Os raios  $\gamma$  podem ser produzidos no decaimento radiativo, na fusão ou na fissão nuclear. O comprimento de onda dessa radiação está dentro do domínio de valores entre 10 e 0,01 nm.

Os raios-x são parte do conjunto de radiações ditas ionizantes. Representam, portanto risco à saúde. Radiação ionizante é todo tipo de partícula (ou onda) capaz de ionizar átomos e moléculas. Radiação alfa, beta ou gama são exemplos de radiação ionizante.

Raios-x são empregados na área médica (diagnósticos), na área científica (cristalografia), e na construção civil.



**Raios- $\gamma$**  São as ondas de maior frequência do espectro eletromagnético. Elas são compostas por fótons de maior energia. Assim, ela é capaz de ionizar quase todos os átomo e moléculas. Representam altíssimo risco para a saúde.

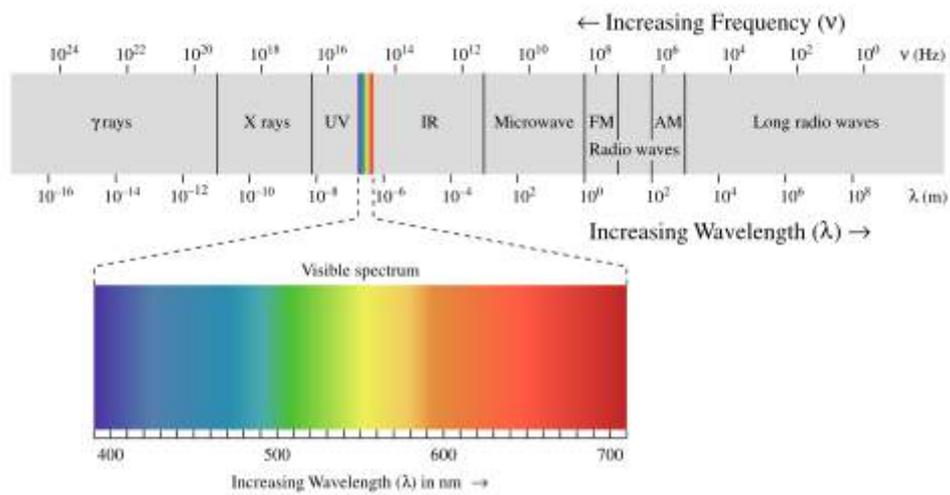


Figura 4.1 – Espectro Eletromagnético

## Cap05 - Interferência

### Princípio da Superposição

Interferência é o fenômeno ondulatório que tem como origem quando temos vários raios luminosos atingindo um mesmo ponto de um anteparo. Neste caso as ondas se somam de acordo com a adição vetorial dos campos eletromagnéticos (princípio da superposição). Ao se calcular a intensidade do campo resultante, através da eq. (3.41), veremos que esta pode ser maior ou menor que a soma das intensidades dos campos que se superpuseram. Em geral, estes são oriundos da mesma fonte e percorrem caminhos ópticos distintos, de forma que haverá uma diferença de fase entre eles. A Fig. 5.1 mostra um exemplo de como o processo de interferência pode ser obtido. Para efeitos práticos, é como se os raios 1 e 2 fossem provenientes de duas fontes virtuais,  $F'$  e  $F''$ .

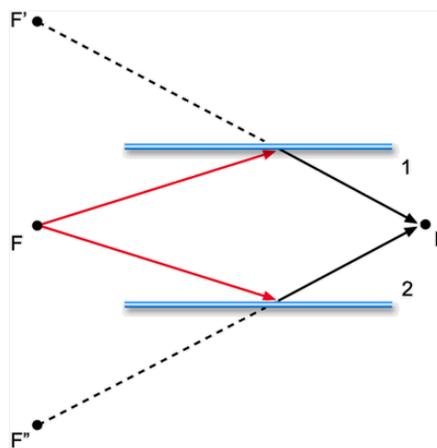


Fig. 5.1 - Diagrama esquemático mostrando a obtenção de interferência.

Para entender melhor o princípio da superposição vamos considerar duas fontes pontuais  $F_1$  e  $F_2$  emitindo ondas esféricas, monocromáticas e coerentes num meio não polarizável (vácuo) conforme está mostrado na Fig. 5.2. No ponto P temos:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}_{01}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \exp\{i[k|\vec{r} - \vec{r}_1| - \omega t - \varphi_1]\} \quad (5.1a)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{E}_{02}}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \exp\{i[k|\vec{r} - \vec{r}_2| - \omega t - \varphi_2]\} \quad (5.1b)$$

que são os campos produzidos pelas fontes  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente.

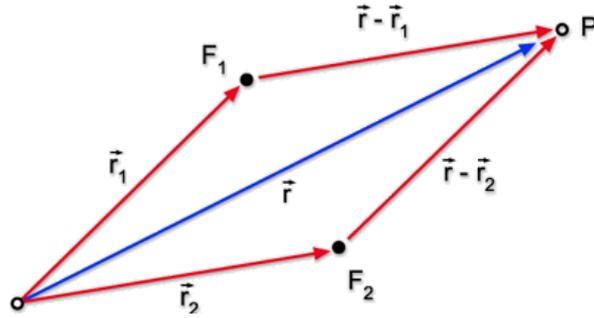


Fig. 5.2 - Arranjo para a observação de interferência de duas fontes pontuais monocromáticas.

O campo resultante  $\vec{E}$  vem da superposição de  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$ , isto é, da adição vetorial  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . A intensidade é proporcional a  $(\vec{E}^* \cdot \vec{E})$ , logo:

$$:\vec{E}^* \cdot \vec{E} = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* \quad (5.2)$$

Os dois últimos termos são aqueles responsáveis pela interferência, como veremos a seguir. Podemos escrever estes termos como:

$$\vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* = \frac{2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}}{|\vec{r} - \vec{r}_1| |\vec{r} - \vec{r}_2|} \cos(k|\vec{r} - \vec{r}_1| - k|\vec{r} - \vec{r}_2| + \varphi_1 - \varphi_2) \quad (5.3)$$

Supondo que  $\vec{E}_{01}$  e  $\vec{E}_{02}$  são paralelos e definindo:

$$\vec{A}_1 = \vec{E}_{01} / |\vec{r} - \vec{r}_1| \quad (5.4a)$$

$$\vec{A}_2 = \vec{E}_{02} / |\vec{r} - \vec{r}_2| \quad (5.4b)$$

$$\delta = k(|\vec{r} - \vec{r}_1| - |\vec{r} - \vec{r}_2|) + \varphi_1 - \varphi_2 \quad (5.4c)$$

temos:

$$\vec{E}^* \cdot \vec{E} = A_1^2 + A_2^2 + 2\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 \cos \delta \quad (5.5)$$

ou alternativamente,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (5.6)$$

onde o último termo, oriundo da soma de  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$  varia com a diferença de fase entre os campos e dá origem ao fenômeno chamado interferência. Para a obtenção da eq. (5.6) tomamos  $\vec{E}_{01}$  e  $\vec{E}_{02}$  paralelos. Se isto não ocorrer, o termo de interferência deverá ser multiplicado por  $\cos \Phi$ , onde  $\Phi$  é o ângulo

entre  $\vec{E}_{01}$  e  $\vec{E}_{02}$ . Voltando à análise da eq. (5.6), podemos ver que a intensidade máxima é:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 \quad (5.7a)$$

que é maior que a soma  $(I_1 + I_2)$ . Isto acontece quando o cosseno vale 1, ou seja, quando  $\delta = 2n\pi$  (interferência construtiva). Por outro lado, a intensidade mínima é dada por:

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2 \quad (5.7b)$$

que é menor que  $(I_1 + I_2)$ . Isto acontece para  $\cos \delta = -1$ , ou seja, quando  $\delta = (2n+1)\pi$  (interferência destrutiva). A Fig. 5.3 mostra como a intensidade varia com  $\delta$ .

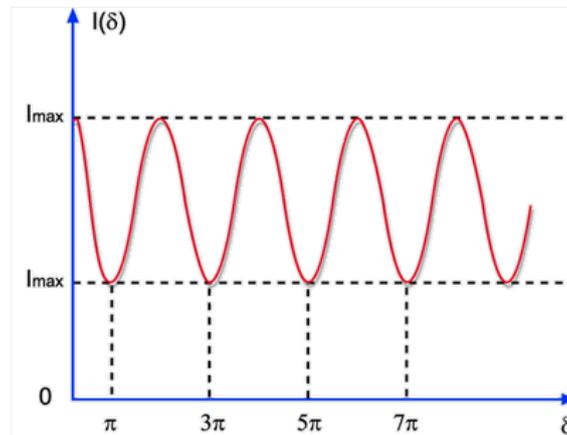


Fig. 5.3 - Intensidade dos campos superpostos com função da diferença da fase.

No caso em que  $I_1 = I_2 = I_0$  temos  $I_{\max} = 4I_0$  e  $I_{\min} = 0$ . Costuma-se definir a visibilidade das franjas (visibilidade de Michelson) como:

$$\eta = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2} \quad (5.8)$$

No caso particular em que  $\phi_1 = \phi_2$  temos  $\delta = k\{|\vec{r} - \vec{r}_2| - |\vec{r} - \vec{r}_1|\}$ , de forma que se considerarmos os máximos, veremos que eles satisfazem:

$$\frac{\delta}{k} = \frac{2n\pi}{k} = \{|\vec{r} - \vec{r}_2| - |\vec{r} - \vec{r}_1|\} = n \times \text{const.} \quad (5.9)$$

$\delta$  pode ser colocado em termos da diferença de caminhos óticos, que neste caso é dada por:

$$\Delta = n \left\{ |\vec{r} - \vec{r}_2| - |\vec{r} - \vec{r}_1| \right\} \quad (5.10)$$

Logo:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta + (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5.11)$$

Geralmente  $\phi_1 = \phi_1(t)$  e  $\phi_2 = \phi_2(t)$ , isto é, as fases mudam com o tempo. Chamando  $\tau_0$  de tempo de coerência, que é um tempo característico ligado à mudança de fase, e T de tempo de observação, quando  $\tau_0 \ll T$  temos interferência não estacionária.

## Interferência por divisão da frente de onda

Na discussão do princípio da superposição feita na seção anterior, para simplificar a análise foram utilizados apenas dois feixes, mas o princípio é válido para um número arbitrário deles, conforme abordaremos nas seções posteriores. Em dispositivos interferométricos que utilizam dois feixes costuma-se dividir a frente de onda e isto pode ser feito de várias maneiras, como veremos a seguir.

### a. Experiência de Young (fenda dupla)

Um experimento clássico que demonstra a interferência da luz foi feito por Thomas Young, em 1802. Considere o arranjo experimental mostrado na Fig. 5.4. Luz proveniente de uma fonte F passa por um pequeno orifício S e incide sobre duas fendas paralelas estreitas  $S_1$  e  $S_2$  separadas por uma distância h. Um anteparo colocado após as fendas a uma distância  $D \gg h$  mostrará listas claras e escuras, definindo assim o padrão de interferência que estamos interessados em encontrar. Note que o orifício S é de fundamental importância, pois é ele que fornece a coerência espacial necessária entre a radiação vinda das duas fendas.

Como vimos anteriormente na eq. (5.11),

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

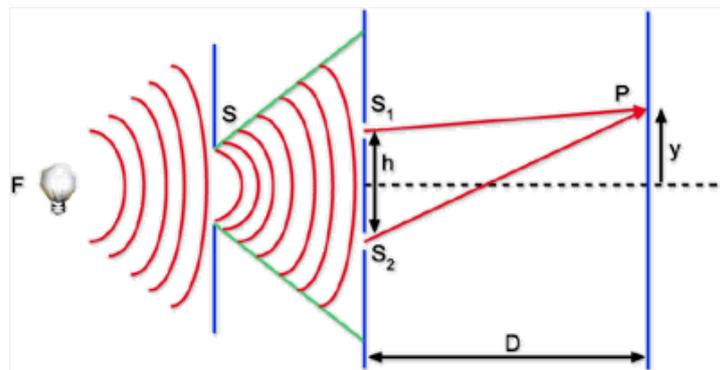
onde  $\Delta = n(\overline{S_2P} - \overline{S_1P})$  é a diferença de caminhos ópticos. Usando o teorema de Pitágoras temos:

$$\overline{S_2P} = \sqrt{\left(y + \frac{h}{2}\right)^2 + D^2} \approx D \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\left(y + \frac{h}{2}\right)^2}{D^2} \right\} \quad (5.12a)$$

$$\overline{S_1P} = \sqrt{\left(y - \frac{h}{2}\right)^2 + D^2} \approx D \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\left(y - \frac{h}{2}\right)^2}{D^2} \right\} \quad (5.12b)$$

que são expressões válidas apenas quando  $h \ll D$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} \Delta &= nD \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{y^2 + h^2/4 + yh}{D^2} \right] \\ &- nD \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{y^2 + h^2/4 - yh}{D^2} \right] = \frac{nyh}{D} \end{aligned} \quad (5.13)$$



**Fig. 5.4 - Experimento de Young para a observação de interferência.**

Vamos agora supor que  $n=1$  (vácuo) e  $\phi_1 = \phi_2$  (feixes coerentes). Disto resulta que:

$$\delta = \frac{2\pi yh}{\lambda_0 D} \quad (5.14)$$

Para se obter intensidade máxima devemos ter:

$$\delta = 2m\pi = \frac{2\pi yh}{\lambda_0 D} \Rightarrow y_{\max} = \frac{D}{h} m\lambda_0 \quad (5.15a)$$

e intensidade mínima quando:

$$\delta = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{2\pi yh}{\lambda_0 D} \Rightarrow y_{\min} = \frac{D}{h} \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 \quad (5.15b)$$

A Fig. 5.5 mostra o padrão de interferência que se observa no anteparo. A distância entre duas franjas consecutivas (dois máximos consecutivos), chamada *interfranja* é dada por:

$$y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda_0 D}{h} \quad (4.16)$$

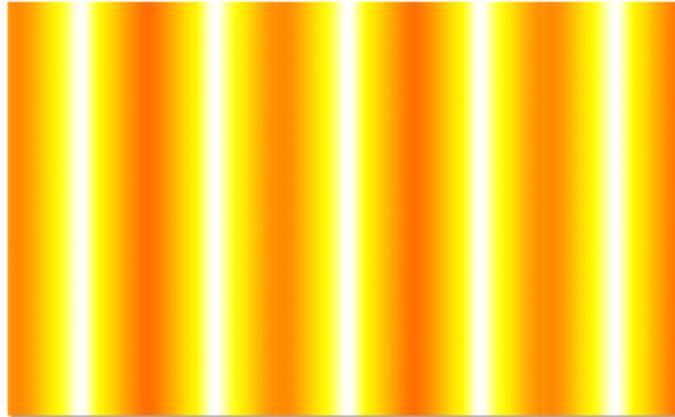


Fig. 5.5 - Padrão de interferência obtido com a fenda dupla.

Maneiras alternativas de se demonstrar interferência por divisão da frente de ondas são vistas na Fig. 5.7. Dentre elas se incluem também os interferômetros de Michelson e de Mach-Zehnder, que devido a sua importância serão tratados separadamente.

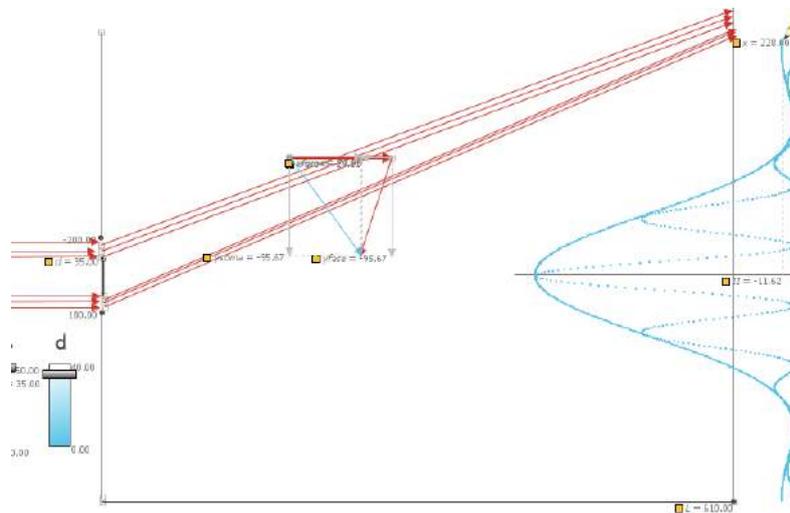


Fig.5.6 – Gráfico da Intensidade da frente de onda usando o software Modellus.

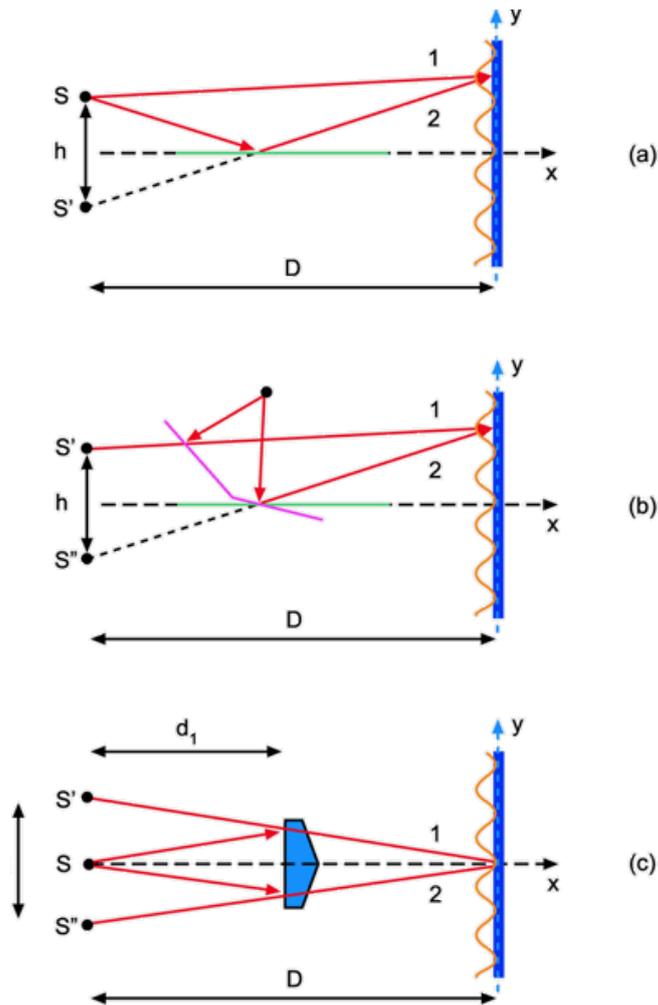


Fig. 5.7 - Alguns dispositivos que produzem interferência por divisão de frente de onda: (a) espelho simples de Lloyd, (b) espelho duplo de Fresnel e (c) biprisma de Fresnel.

## b. Interferômetro de Michelson

O interferômetro de dois feixes mais conhecido foi desenvolvido por Michelson em 1880. O desenho básico está mostrado na Fig. 5.8. A radiação proveniente de uma fonte  $F$  é colimada e dividida por um divisor de feixes  $DF$ . Os feixes divididos são refletidos pelos espelhos  $E_1$  e  $E_2$  e voltam para o divisor de feixes. O padrão de interferência é observado em  $P$ , ao se variar a posição de um dos espelhos.

Supondo ser a fonte monocromática e o interferômetro estar no vácuo ( $n = 1$ ), a diferença de caminhos ópticos é dada por  $\Delta = x_1 - x_2$  e, portanto a diferença de fase é:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(x_1 - x_2) \quad (5.17)$$

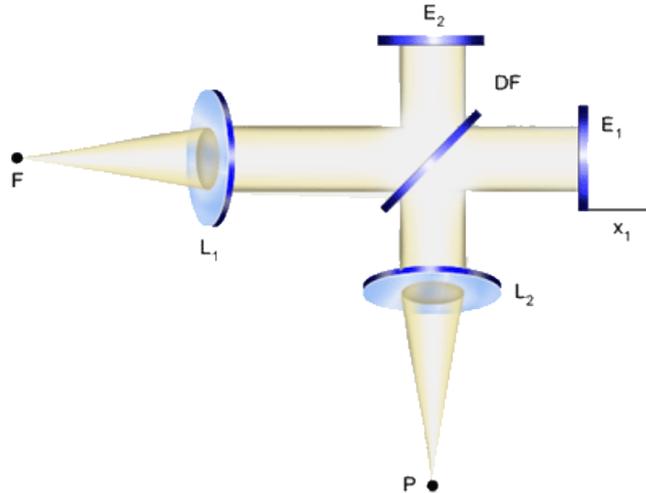


Fig. 5.8 - Interferômetro de Michelson.

onde  $x_1$  e  $x_2$  são respectivamente as distâncias percorridas pelos feixes 1 e 2. A intensidade observada em P é:

$$I(\Delta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{y} \Delta\right) \quad (5.18)$$

Como os feixes 1 e 2 são refletidos e transmitidos de maneira igual pelo divisor D, temos  $I_1 = I_2 = I_0$ . Desta forma,

$$I(\Delta) = 2I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{y} \Delta\right) \right] \quad (5.19)$$

Observando que  $I(0) = 4I_0$ , podemos re-escrever a eq. (5.19) como:

$$I(\Delta) = \frac{1}{2}I(0) \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{y} \Delta\right) \right] \quad (5.20)$$

ou, alternativamente:

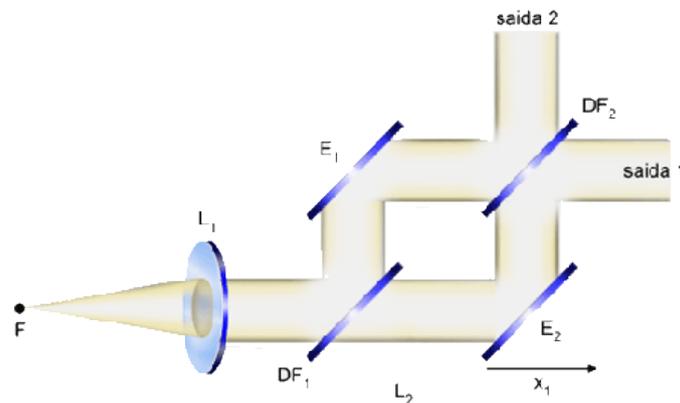
$$P(\Delta) = I(\Delta) - \frac{1}{2}I(0) = \frac{1}{2}I(0) \cos\left(\frac{2\pi}{y} \Delta\right) \quad (5.21)$$

É interessante notar que  $P(\Delta)$  é a transformada de Fourier do espectro da fonte, isto é, de uma função  $\delta(\lambda - \lambda_0)$ . Este instrumento é usado para fazer espectroscopia com transformada de Fourier da seguinte maneira: mede-se  $I(\Delta)$  variando-se a posição de um dos espelhos, subtrai-se  $\frac{1}{2} I(0)$  para a obtenção de  $P(\Delta)$  e em seguida faz-se a transformada de Fourier que nos dá o espectro  $B(\lambda)$  da fonte. Voltaremos a falar deste instrumento no Cap.8 do ótica avançado.

### c. Interferômetro de March-Zehnder

Um outro interferômetro de dois feixes importante é o interferômetro de Mach-Zehnder. O desenho básico está mostrado na Fig. 5.9 e o princípio de funcionamento é similar ao de Michelson. A radiação proveniente de uma fonte  $F$  é colimada e dividida por um divisor de feixes  $DF_1$ . Os feixes divididos são refletidos pelos espelhos  $E_1$  e  $E_2$  e vão para um outro divisor de feixes  $DF_2$ . O padrão de interferência é observado na saída 1 ou na saída 2 ao se variar a posição de um dos espelhos.

A característica principal deste instrumento é que variando-se a diferença de caminhos ópticos é possível fazer com que a luz comute entre uma e outra saída. Isto tem importância em comunicações ópticas porque possibilita alterar a direção de tráfego do sinal. Já no caso do interferômetro de Michelson a luz ou vai para o observador ou retorna para a fonte.



**Fig. 5.9 - Interferômetro de Mach-Zehnder.**

## Cap06 - Difração da Luz

### Princípio de Huygens

Neste capítulo vamos considerar o fenômeno da difração da radiação eletromagnética, que é consequência da natureza ondulatória da luz. Ela se constitui da distorção causada numa onda eletromagnética que incide sobre um obstáculo de dimensões comparáveis ao seu comprimento de onda. Estes obstáculos podem ser aberturas num anteparo, objetos opacos tais como esferas, discos e outros. Em todos esses casos o caminho seguido pelo raio de luz não obedece às leis da óptica geométrica, sendo desviado sem haver mudanças no índice de refração do meio. Assim, temos a presença de radiação em locais nos quais ela não seria esperada, como em regiões de sombra indicadas Fig. 6.1. É como se a interação da radiação com as bordas do anteparo, ou do obstáculo, causasse uma perturbação na radiação em propagação e a espalhasse por regiões onde ela não deveria normalmente ser detectada.

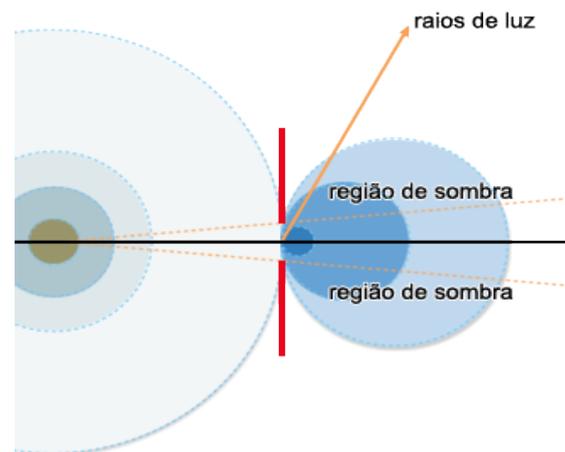
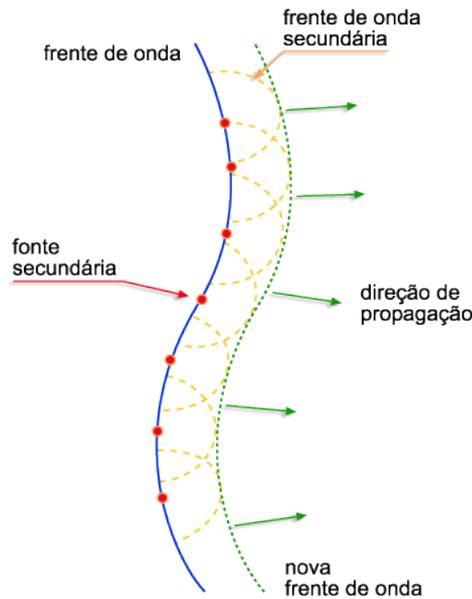


Fig. 6.1 - Ilustração de um experimento de difração em uma abertura.

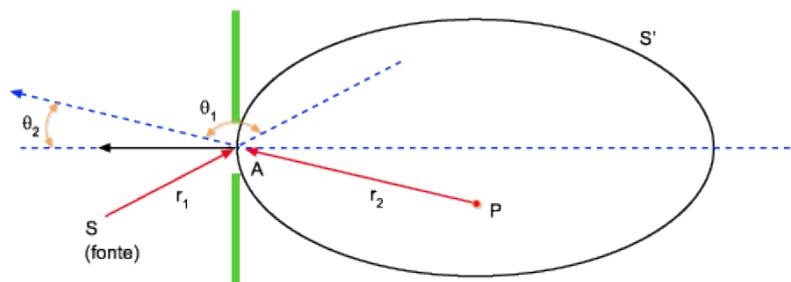
Os aspectos essenciais da difração podem ser explicados qualitativamente pelo princípio de Huygens. Segundo ele, cada ponto na frente de onda age como uma fonte produzindo ondas secundárias que espalham em todas as direções. A função envelope das frentes de onda das ondas secundárias forma a nova frente de onda total. A Fig. 6.2 ilustra este fato. Com este princípio podemos perceber que cada nova frente no instante  $t'$  de onda é formada pela *interferência* de infinitas fontes, as quais estão irradiando a partir da frente de onda no instante  $t$ . Isto pode ser traduzido em forma matemática dizendo-se que em cada ponto da nova frente de onda teremos um campo óptico que é igual à soma dos campos irradiados por todas as fontes secundárias. Note que o fenômeno de difração está fortemente baseado no de interferência. Como o número de fontes é infinito, as somas dos campos referentes a cada fonte secundária se transformará numa integral.



**Fig. 6.2 – Ilustração do princípio de Huygens para a construção geométrica de uma frente de onda, a partir de uma frente de onda anterior.**

O princípio de Huygens pode ser enunciado matematicamente pela soma (integral) das várias ondas secundárias geradas numa área iluminada, como por exemplo uma fenda. A geometria para esta situação está esquematizada na Fig. 6.3. A equação resultante de várias ondas secundárias no ponto P é:

$$U(P) = \iint_A U_A \frac{\exp\{i(kr_2 - \omega t)\}}{r_2} dA \quad (6.1)$$



**Fig. 6.3 - Difração por uma fenda de área A.**

onde  $U_A$  é a amplitude da onda primária que se origina na fonte S e ilumina a fenda. A partir dela cada elemento infinitesimal  $dA$  da abertura gera uma onda esférica secundária que interfere no ponto P com outras ondas esféricas geradas em diferentes elementos da abertura. Vamos em seguida ver com mais detalhes matemáticos a obtenção da eq.

$$U(P) = \iint_A U_A \frac{\exp\{i(kr_2 - \omega t)\}}{r_2} dA \quad (6.2)$$

## Princípio de Babinet

Considere uma abertura  $A$  que produz um campo difratado  $U(P)$  no ponto de observação  $P$ . Suponha agora que a abertura é dividida em duas porções  $A_1$  e  $A_2$  tal que  $A = A_1 + A_2$ . As duas novas aberturas são ditas complementares. Um exemplo está mostrado na Fig. 5.7.

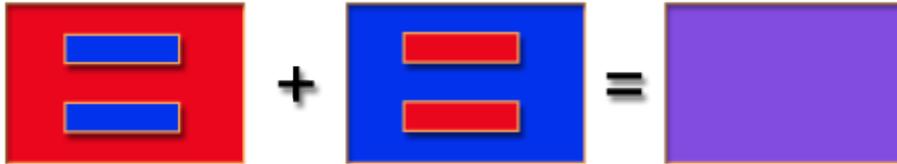


Fig. 6.4 - Exemplo e a geometria do princípio de Babinet.

Da fórmula de Fresnel-Kirchhoff, ver cap.5 do ótica avançado, temos que  $U(P) = U_1(P) + U_2(P)$ . Esta equação, conhecida como princípio de Babinet, é uma consequência direta da possibilidade de divisão da região de integração em diversas partes.

## Difração de Fraunhofer

No tratamento detalhado da difração é usual distinguir-se dois casos gerais conhecidos como difração de Fraunhofer e Fresnel. Qualitativamente falando, a difração de Fraunhofer ocorre quando as ondas incidente e difratada são planas. Este é o caso quando as distâncias  $r_1$  e  $r_2$  são tão grandes que a curvatura da frente de onda pode ser desprezada, como mostra a Fig. 6.5(a). Por outro lado, se a fonte e o ponto de observação estão suficientemente próximos da abertura temos então difração de Fresnel (Fig. 6.5(b)).

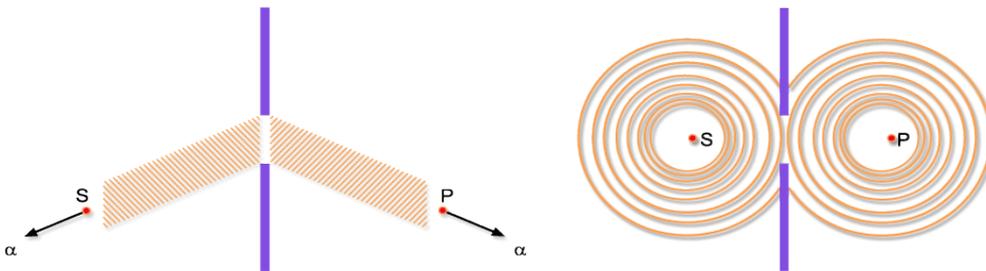
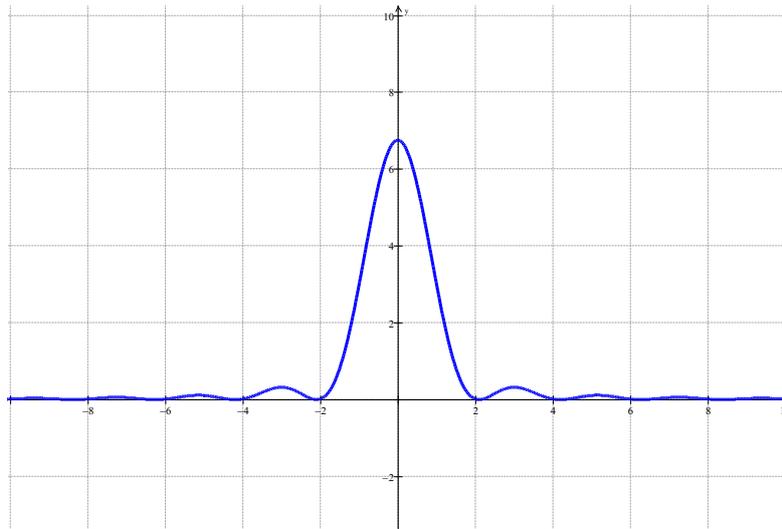
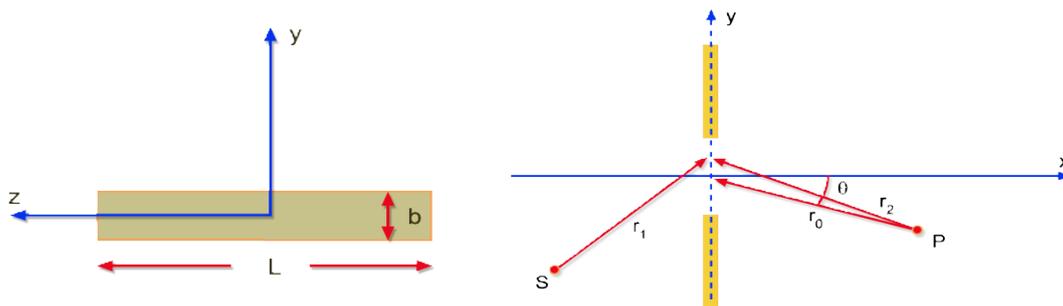


Fig. 6.5 - Tipos de difração - (a) Fraunhofer e (b) Fresnel



**Fig.6.6 – Gráfico da Intensidade da Luz no anteparo**

O arranjo experimental para se observar difração de Fraunhofer está mostrado na Fig. 6.6. Em particular, vamos analisar o caso da difração pela fenda estreita mostrada na Fig. 6.7.



**Fig. 6.7 - Fenda estreita ( $L \gg b$ ).**

Dentro destas restrições suponha uma fenda simples de largura  $a$  e comprimento muito longo, sendo iluminada por luz monocromática plano polarizada de comprimento de onda  $\lambda$  em incidência normal. De acordo com o princípio de Huygens cada ponto da frente de onda que atinge a fenda é considerado como uma fonte puntiforme de ondas secundárias e assim, a fenda iluminada pode ser considerada como sendo uma distribuição de irradiadores elementares que emitem luz em todas as direções.

Assim, em vez de considerar a luz que sai da fenda e atinge o anteparo como um único feixe, vamos usar o princípio de Huygens e considerar o feixe de luz como sendo constituído por um conjunto de  $N$  fontes microscópicas (pontuais), como ilustrado na figura abaixo:

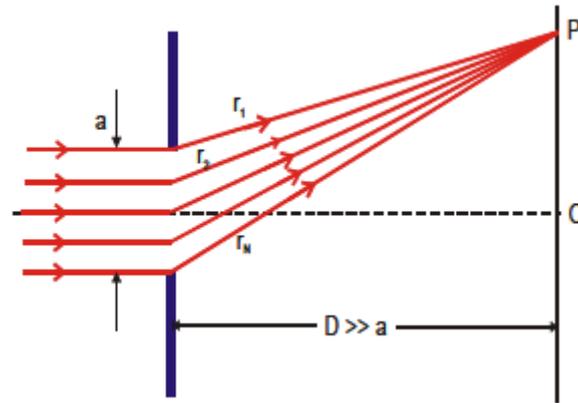


Fig.6.8 Aplicação do princípio de Huygens a uma fenda simples.

Assim, dividiremos a fenda em  $N$  partes (fontes microscópicas) iguais, onde  $N \gg 1$ . Deste modo, teremos  $N$  raios de luz saindo da fenda e atingido cada ponto  $P$  do anteparo. Seja  $E_N$  a amplitude da onda que atinge a fenda. A luz em  $P$ , gerada por aquelas fontes será representada pelos vetores:

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= \Delta E_m(r_1) \cdot \cos(k \cdot r_1 - \omega \cdot t) \hat{e}_1 \\ \Delta E_2 &= \Delta E_m(r_2) \cdot \cos(k \cdot r_2 - \omega \cdot t) \hat{e}_2 \\ &\vdots \\ \Delta E_N &= \Delta E_m(r_N) \cdot \cos(k \cdot r_N - \omega \cdot t) \hat{e}_N \end{aligned} \quad (6.3)$$

Onde  $\hat{e}_N$  são os versores que definem as direções dos vetores  $\Delta \vec{E}_N$ .

Cabe aqui algumas observações. Em primeiro lugar, como estamos supondo que as ondas que atingem a fenda são planas isto implica que todas as fases dos campos  $\Delta E_i$  são iguais, uma vez que todos os pontos da fenda são atingidos simultaneamente por uma mesma frente de onda. Por simplicidade fizemos nulas estas fases. Em segundo lugar, as ondas que atingem o ponto  $P$  são esféricas de modo que suas amplitudes,  $\Delta E_m(r_i)$ , dependem da distância  $r_i$ . Contudo, na aproximação de Fraunhofer a distância entre o ponto  $P$  e o ponto  $O$  é muito menor que a distância  $D$  entre a fenda e o anteparo, então podemos supor que esta amplitude não varia apreciavelmente sobre o anteparo (de  $P$  até  $O$ ). Por outro lado, sabendo-se que a amplitude da onda que atinge a fenda é  $E_m (= E_0/r)$  e como dividimos a fenda em  $N$  partes iguais é razoável supor que a relação entre  $E_m$  e  $\Delta E_m(r_i)$  seja:

$$E_m = N \Delta E_m(r_i) = N \Delta E_m \quad (6.4)$$

O campo total em  $P$  será igual a soma vetorial dos campos  $\Delta E_i$ . No entanto, como estamos na condição de Fraunhofer, isto é  $D \gg a$ , os versores  $\hat{e}_i$  serão todos paralelos entre si e a soma vetorial poderá ser trocada por uma soma escalar.

$$E = \sum \Delta E_m(r_i) \cdot \cos(k r_i - \omega t) \quad (6.3')$$

Antes de se efetuar esta soma vamos facilitá-la. Observe que se pode escrever:  $r_i = r_1 + (r_i - r_1)$ . Agora vejamos o que ocorre quando  $N = 5$ . Observe na figura abaixo que:

$$\begin{aligned}
r_2 - r_1 &= (a/4) \text{ sen } \theta \\
r_3 - r_1 &= 2 (a/4) \text{ sen } \theta = 2 (r_2 - r_1) \\
r_4 - r_1 &= 3 (a/4) \text{ sen } \theta = 3 (r_2 - r_1) \\
r_5 - r_1 &= 4 (a/4) \text{ sen } \theta = 4 (r_2 - r_1).
\end{aligned}$$

Assim, para uma fenda com um numero N de irradiadores podemos escrever genericamente : 1,2,3... Em particular, se  $i = N$ , então:

$$(r_N - r_1) = (N - 1) (r_2 - r_1) = a \text{ sen } \theta \quad (6.5)$$

Assim, cada termo de (6.3') difere de  $k\Delta r$  de modo que podemos definir uma fase  $\Delta\phi$ , tal que  $\Delta\phi = k (r_2 - r_1)$ . Definimos também  $\phi = k (r_N - r_1)$  e é fácil verificar que a relação entre ambas é:

$$\phi = k a \text{ sen } \theta = (N - 1) \Delta\phi = k (r_N - r_1) \quad (6.6)$$

Podemos agora reescrever novamente as equações (1) na forma

$$\begin{aligned}
\Delta E_1 &= \Delta E_m \cos(k.r_1 - \omega.t) \\
\Delta E_2 &= \Delta E_m \cos(k.r_1 - \omega.t + \Delta\phi) \\
&\vdots \\
\Delta E_M &= \Delta E_m \cos(k.r_1 - \omega.t + (N-1) \Delta\phi)
\end{aligned} \quad (6.7)$$

O campo em P será a soma de todos estes campos. Para efetuarmos este cálculo observamos que o termo  $k.r_1 - \omega.t$  é comum a todos e vamos chamá-lo de  $f(t)$ . Fazendo o limite do número de divisões tendendo ao infinito ( $N \rightarrow \infty$ ) a soma (6.3') se torna a integral:

$$E(P) = \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} dE = \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \left(\frac{E_M}{a}\right) \text{sen}(f(t) + \vartheta) dy \quad (6.8)$$

onde estamos fazendo a hipótese que o feixe de luz é uniforme ao longo da fenda e que o elemento de energia  $dE$  pode ser escrito como  $E_M dy/a$ . Sendo  $E_M$  a amplitude no centro da fenda, na aproximação de Fraunhofer, podemos desprezar a dependência de  $dE$  com o ângulo  $\theta$ .

Como os elementos de onda que emergem da fenda estão todos em fase, temos que a diferença de fase  $\phi$  com que eles chegam a cada ponto P no anteparo é devida unicamente a diferença de caminho ( $k \cdot \Delta r$ ) entre cada raio microscópico [ref Keller]. Assim,  $\phi$  é a diferença de fase entre o raio que emerge do ponto central  $y = 0$  e o raio que emerge do ponto  $y$ . Como pode ser visto na fig.6.8 o raio que sai do ponto  $y$  caminha  $y \cdot \text{sen}(\theta)$  a mais que o raio de  $y = 0$ . Como a diferença de trajeto de um comprimento de onda corresponde a uma diferença de fase de  $2\pi$  rad, temos

$$\frac{\Delta \text{fase}}{2\pi} = \frac{\Delta \text{trajeto}}{\lambda} \quad \text{ou} \quad \frac{\phi}{2\pi} = \frac{y \cdot \text{sen}(\theta)}{\lambda} \quad (6.9)$$

Assim, a relação entre a fase  $\phi$  e a distância  $y$  é dada por:

$$\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \text{sen}\theta\right) y \quad \text{e} \quad d\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \text{sen}\theta\right) dy \quad (6.10)$$

Agora que achamos a dependência funcional entre  $\varphi$  e  $y$  podemos efetuar a integral (6.8)

$$E(P) = \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \left(\frac{E_M}{a}\right) \text{sen}(f(t) + \vartheta) dy = \int_{-\beta}^{\beta} \left(\frac{E_M}{2\beta}\right) \text{sen}(f(t) + \vartheta) d\varphi \quad (6.11a)$$

onde tivemos que mudar os limites de integração para

$$\beta = (\pi a/\lambda)\text{sen}(\theta).$$

Com o auxílio da identidade trigonométrica  $\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a).\cos(b) + \cos(a).\text{sen}(b)$ , e usando o fato que a integral independe do tempo podemos escrever a equação (6.11a) como:

$$E(P) = \left(\frac{E_M}{2\beta}\right) \left[ \text{sen}(f(t)) \int_{-\beta}^{\beta} \cos(\vartheta) d\varphi + \cos(f(t)) \int_{-\beta}^{\beta} \text{sen}(\vartheta) d\varphi \right] \quad (6.11b)$$

Como integral do cosseno é o seno e o segundo termo se anula, temos:

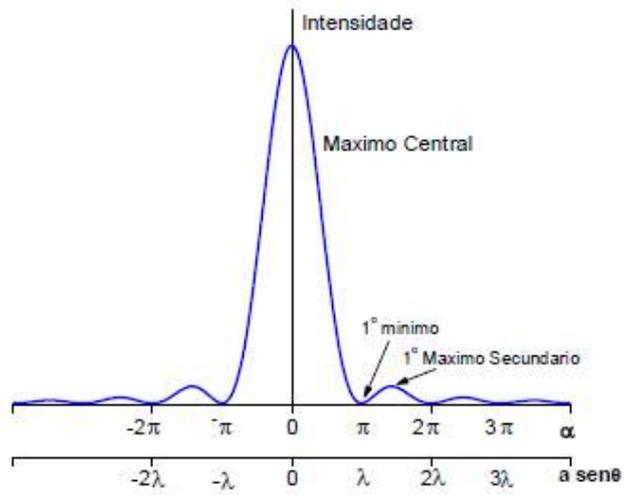
$$E = \frac{E_M}{2\beta} \text{sen}(f(t)) [\text{sen}(\vartheta)]_{-\beta}^{\beta} = \frac{E_M}{2\beta} \text{sen}(f(t)) [\text{sen}(\beta) - \text{sen}(-\beta)]$$

$$E = \frac{E_M}{2\beta} \text{sen}(f(t)) \quad (6.12)$$

Como estamos interessados na intensidade da luz no ponto P do anteparo, temos:

$$I = E^2 = E^*E = I_0 \frac{\text{sen}^2 \beta}{\beta^2} \quad (6.13)$$

que é a equação da difração de fenda única. A dependência de  $I$  com  $\theta$  está no fator  $\beta$ . Temos pela expressão (6.13) que quando  $\beta$  for nulo teremos um máximo central (limite  $\text{sen}(\beta)/\beta = 1$  para  $\beta \rightarrow 0$ ). Quando  $\beta = n\pi$  ( $n$  inteiro) teremos mínimos locais para a intensidade. E quando  $\beta = (2n-1)\pi/2$  teremos máximos locais de  $I$ . Ver gráfico abaixo.



**Fig.6.9 - Figura de difração em função do comprimento de onda.**

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/HBASE/PHYOPT/fraungeo.html>

Princípio da Incerteza – Exp. Da fenda dupla

<http://www.youtube.com/watch?v=W81y2eCGFrU&feature=related>

# Cap07 - Polarização da Luz

## Princípios Básicos e Definição

Em física, **polarização** é uma propriedade das ondas, tais como a luz e outras radiações electromagnéticas. Ao contrário de ondas mais familiares como as ondas aquáticas ou sonoras, as ondas electromagnéticas são tridimensionais e a polarização é uma medida da variação do vector do campo eléctrico dessas ondas com o decorrer do tempo.

A manifestação mais simples, para visualização, é a de uma onda plana, que é uma boa aproximação para a maioria das ondas luminosas. Como vimos numa onda plana as direcções dos campos magnético e eléctrico estão, em qualquer ponto, perpendiculares à direcção de propagação. Simplesmente porque o plano é bidimensional, o vector campo eléctrico no plano num dado ponto do espaço pode ser decomposto em duas componentes ortogonais. Chamemos as componentes de  $x$  e  $y$  (segundo as convenções da geometria analítica). Para uma onda harmónica, onde a amplitude do vector do campo eléctrico varia senoidalmente, as duas componentes têm exactamente a mesma frequência. Contudo, estas duas componentes têm duas outras características que podem diferir. Em primeiro lugar, as duas componentes podem não ter a mesma amplitude. Em segundo, as duas componentes podem não ter a mesma fase, isto é, podem não alcançar os seus máximos e mínimos ao mesmo tempo, no plano fixo que temos por base.

Considerando a forma traçada num plano fixado pelo vector campo eléctrico à medida que uma onda plana o percorre, obtemos a descrição do *estado de polarização*.

As imagens seguintes correspondem a alguns exemplos da propagação do vector do campo eléctrico (azul) no tempo, com as suas componentes  $x$  e  $y$  (vermelha/esquerda e verde/direita, respectivamente) e a forma projetada pelo vector no plano (roxo), figura 7.1 abaixo.

Considere em primeiro lugar o caso especial (esquerda), onde as duas componentes ortogonais estão em fase. Neste caso a intensidade das duas componentes é sempre igual ou proporcional a uma constante, daí que a direcção do vector campo eléctrico resultante (vector que resulta da soma destas duas componentes) irá sempre redundar num segmento de reta no plano. Designamos este caso especial de polarização linear. A direcção desta linha irá depender da amplitude relativa destas duas componentes. A direcção pode ser em qualquer ângulo sobre o plano.

Agora considere outro caso especial (ao centro), onde as duas componentes ortogonais têm exactamente a mesma amplitude que é de  $90^\circ$  em fase. Neste caso uma componente é igual a zero quando a outra componente está na amplitude máxima ou mínima. Neste caso especial o vector do campo eléctrico no plano formado pela soma dos dois componentes vai girar num círculo. Chamamos a este caso especial de polarização circular. A direcção de rotação irá depender da relação entre as fases. Chamemos a estes

casos de polarização circular direita e polarização circular esquerda, dependendo da rotação do vetor.

Todos os outros casos em que as duas componentes não estão em fase nem têm a mesma amplitude e/ou não estão com  $90^\circ$  fora de fase, encaixam na designação de polarização elíptica!..

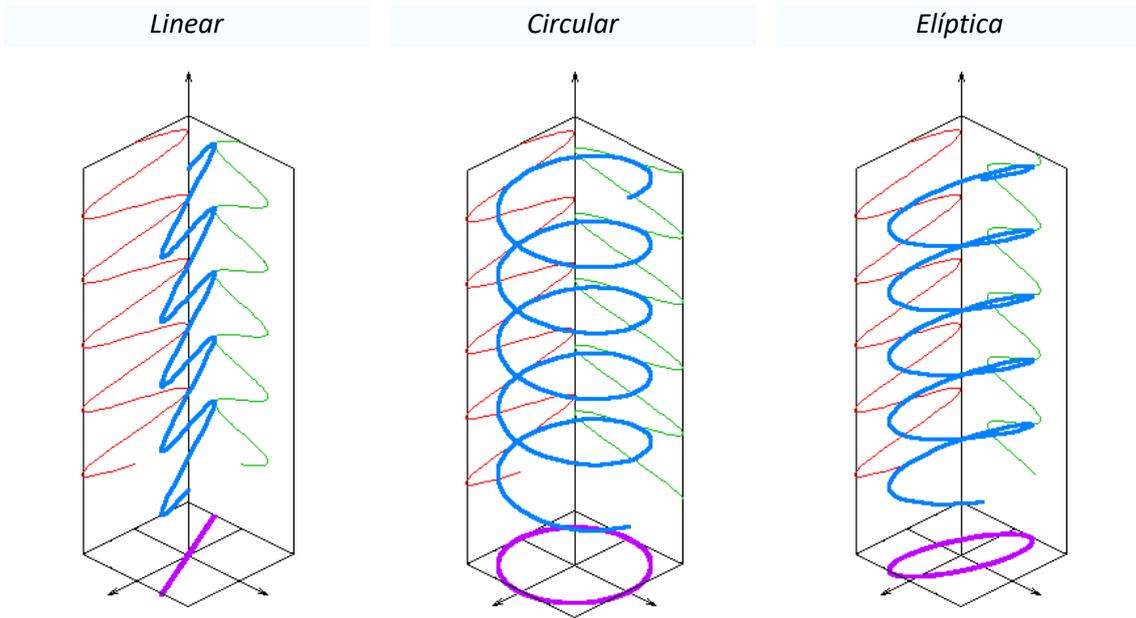


Figura 7.1 – Exemplos de polarização da Luz

## Polarização Linear

Considere uma onda eletromagnética plana, como discutido na seção 3.4, dada por:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{\pm i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} \quad (7.1a)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp\{\pm i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} \quad (7.1b)$$

Se as amplitudes  $\vec{E}_0$  e  $\vec{H}_0$  são vetores reais e constantes, a polarização da onda é chamada linear. É tradicional em óptica especificar-se a polarização da onda como sendo a direção do campo elétrico e plano de polarização aquele que o contém. Se a onda vier se propagando na direção do observador, este verá o campo elétrico variando sobre um plano fixo conforme mostra a Fig. 7.2.

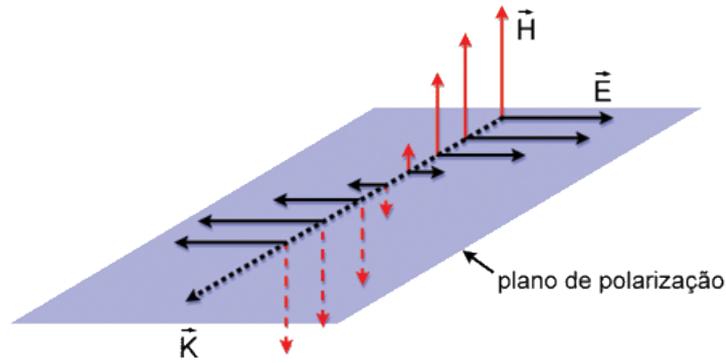


Fig. 7.2 - Propagação de uma onda linearmente polarizada

## Polarização elíptica

No caso da polarização linear, a projeção do vetor  $\vec{E}$  sobre o plano  $xy$  descreve um segmento de reta. No entanto, quando  $\vec{E}_0$  (e consequentemente  $\vec{H}_0$ ) não for um número real, a projeção será uma elipse (ou circunferência, como veremos na próxima seção). Considere a soma de dois campos  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$ , respectivamente nas direções  $x$  e  $y$ , conforme a Fig. 7.3. Ambos possuem a mesma frequência e vetor de onda, e são soluções possíveis da equação de ondas, que diferem por estarem rodados entre si de  $\pi/2$ . Além disto, eles podem também possuir uma diferença de fase relativa que chamaremos de  $\delta$ . As duas soluções são linearmente independentes e, como tal, combinações lineares delas fornecem outras soluções possíveis da equação de onda. Vejamos quais novos tipos de soluções podem advir destas combinações lineares.

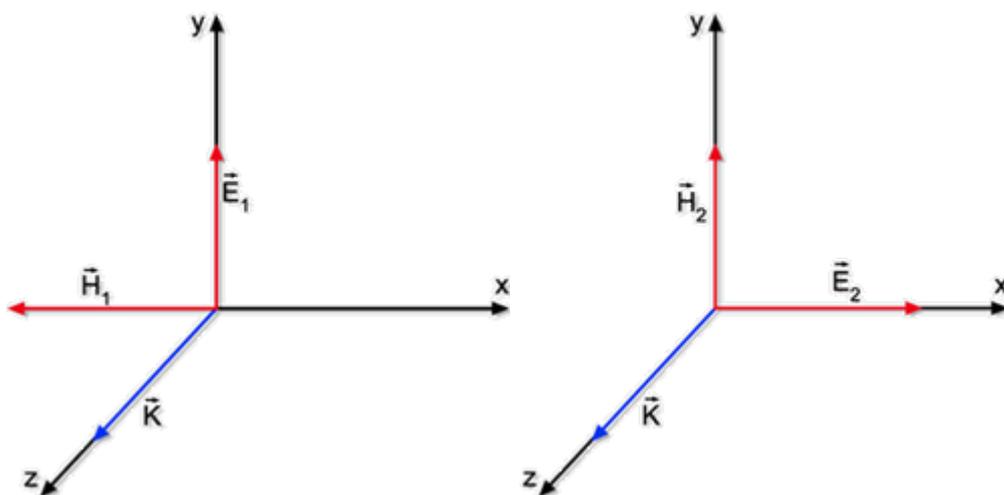


Fig. 7.3 - Representação gráfica da orientação de duas soluções possíveis para a equação de onda.

O campo resultante é dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (E_{10} e^{i\delta} \hat{i} + E_{20} \hat{j}) \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} \quad (7.2)$$

ou alternativamente, tomando a parte real:

$$\vec{E}(r,t) = E_{10} \cos(kr - \omega t + \delta) \hat{i} + E_{20} \cos(kr - \omega t) \hat{j} \quad (7.3)$$

A variação de  $\vec{E}(r,t)$  no espaço e tempo está mostrada na Fig. 7.4 e sua projeção no plano xy, mostrada na Fig. 7.5, descreve uma elipse.

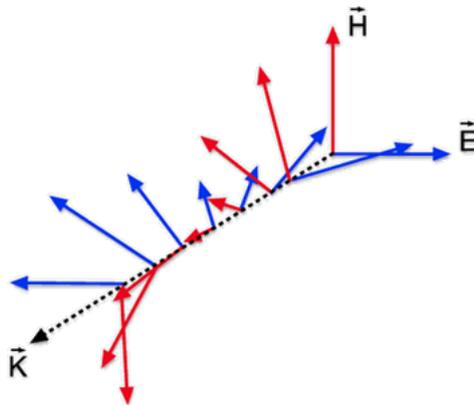


Fig. 7.5 - Onda plana com polarização elíptica.

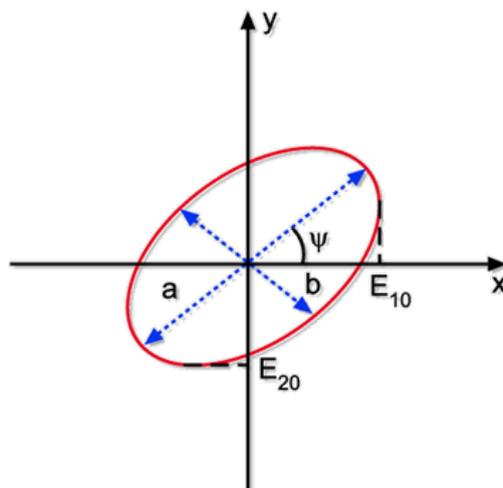


Fig. 7.6 - Projeção do campo elétrico no plano xy.

Esta elipse é descrita pelas equações:

$$\left(\frac{E_1}{E_{10}}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{E_{20}}\right)^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_{10} E_{20}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (7.4a)$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2 \frac{E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 - E_{20}^2} \cos \delta \quad (7.5b)$$

$$a^2 + b^2 = E_{10}^2 + E_{20}^2 \quad (7.5c)$$

$$ab = E_{10}E_{20} \sin \delta \quad (7.5d)$$

cuja demonstração deixaremos como exercício. A elipse é caracterizada pelos parâmetros  $a$ ,  $b$ , e  $\psi$ , que são conhecidos como parâmetros de Stokes. Alguns casos particulares desta situação que estamos estudando ocorrem quando:

$$\delta = 0 \Rightarrow E_1 = \frac{E_{10}}{E_{20}} E_2 \quad (7.6a)$$

$$\delta = \pi \Rightarrow E_1 = -\frac{E_{10}}{E_{20}} E_2 \quad (7.6b)$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{E_1}{E_{10}}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{E_{20}}\right)^2 = 1 \quad (7.6c)$$

Neste caso a projeção de  $\vec{E}$  no plano  $xy$  nos dá uma elipse que roda no sentido horário, tal que:  $E_1 = E_{10} \sin \omega t$  e  $E_2 = E_{20} \cos \omega t$ .

Quando  $\delta = -\pi/2$  teremos ainda uma elipse com os eixos principais, coincidindo com  $x$  e  $y$  mas com polarização no sentido anti-horário, como mostrado na Fig. 8.5d. De um modo geral, pode-se mostrar que para  $0 < \delta < \pi$  temos polarização no sentido horário e para  $\pi < \delta < 2\pi$  no sentido anti-horário.

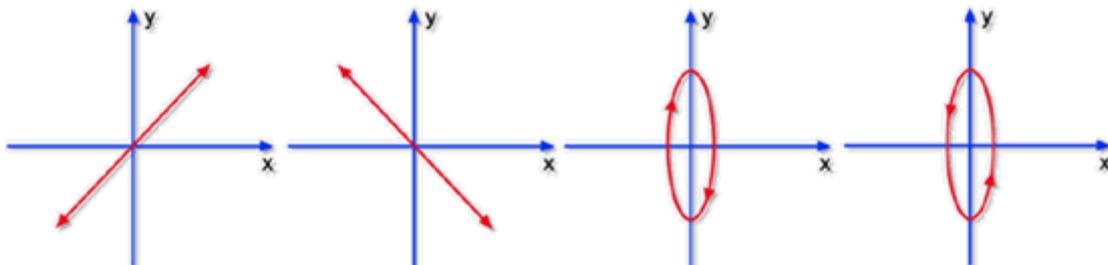


Fig. 7.7 - Alguns casos particulares de polarizações elípticas.

## Polarização circular

Trata-se novamente de um caso particular de luz elipticamente polarizada.

Quando  $\delta = \pm\pi/2$  e  $E_{10} = E_{20} = E_0$ , teremos:

$$E_1^2 + E_2^2 = E_0^2 \quad (7.7a)$$

$$E_1 = E_0 \cos \omega t \quad (7.7b)$$

$$E_2 = \pm E_0 \sin \omega t \quad (7.7c)$$

(+ para  $\delta = \pi/2$  e - para  $\delta = -\pi/2$ ) e assim a elipse se transforma numa circunferência.

## Lâminas de Quarto de Onda e Meia Onda

Queremos agora partir de luz linearmente polarizada e rodar seu plano de polarização ou gerar luz circularmente polarizada. Isto pode ser conseguido com um cristal anisotrópico cujo índice de refração depende da direção (birrefringência), como por exemplo, mica, quartzo, etc. Voltaremos a este tópico no capítulo que aborda a óptica de cristais. Considere a Fig. 6.6, onde luz linearmente polarizada incide sobre uma lâmina de espessura  $d$  com eixos rápido e lento respectivamente nas direções  $x$  e  $y$ .

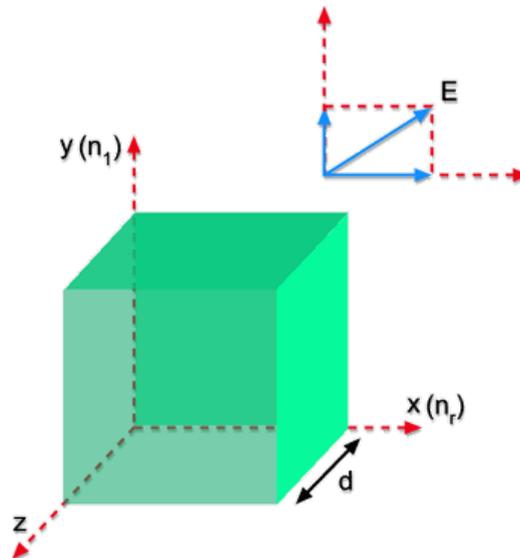


Fig. 7.8 - Incidência de luz sobre uma lâmina birrefringente.

O campo elétrico incidente forma um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $x$  de maneira que suas componentes são:

$$E_x = E_0 \exp\{i(k_r z - \omega t)\} \quad e$$

$$E_y = E_0 \exp\{i(k_l z - \omega t)\}.$$

A onda atinge a placa em  $z = 0$ , onde

$$E_x = E_0 \exp\{-i\omega t\} \quad e \quad E_y = E_0 \exp\{-i\omega t\},$$

e sai em  $z = d$  com:

$$E_x(d) = E_0 \exp\{i(k_r d - \omega t)\} \quad e \quad E_y(d) = E_0 \exp\{i(k_l d - \omega t)\}.$$

A diferença de fase entre as componentes emergentes é:

$$\delta = (k_i - k_r) d = \left( \frac{2\pi}{\lambda_i} - \frac{2\pi}{\lambda_r} \right) d = 2\pi \left( \frac{n_i}{\lambda_0} - \frac{n_r}{\lambda_0} \right) d = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_i - n_r) \quad (7.9)$$

Para termos luz circularmente polarizada,  $\delta = \pi/2$  logo:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_i - n_r) \Rightarrow (n_i - n_r) d = \frac{\lambda_0}{4} \quad (7.10)$$

ou seja, a diferença de caminhos ópticos deve ser igual a um quarto de onda. Por outro lado, quando  $\delta = \pi$ , o plano de polarização da onda será rodado de  $90^\circ$ . Neste caso, a diferença de caminhos ópticos deve ser meia onda:

$$\pi = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_i - n_r) \Rightarrow (n_i - n_r) d = \frac{\lambda_0}{2} \quad (7.11)$$

Se a luz incidente sobre a lâmina de meia onda não estiver com polarização a  $45^\circ$ , o campo será rodado por um ângulo  $2q$ , como **veremos na seção 6.7**.

## Obtenção de luz linearmente polarizada

Existe uma variedade de maneiras de se obter luz linearmente polarizada. Vamos sumarizar algumas delas.

### a. Por reflexão

Quando estudarmos as equações de Fresnel mais adiante, veremos que ao se incidir luz não polarizada sobre uma superfície separando dois meios de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$ , a luz refletida sai polarizada, com  $\vec{E}$  paralelo à superfície, quando o ângulo de incidência for igual ao ângulo de Brewster, como indicado na Fig. 7.9.

### b. Dicroísmo

Certos materiais possuem moléculas orientadas numa direção preferencial e absorvem radiação com polarização paralela ao seu eixo. Conseqüentemente tal material deixará passar apenas a luz que tiver polarização perpendicular ao eixo da molécula como mostra a Fig. 7.10. Um exemplo disto é o polaróide.

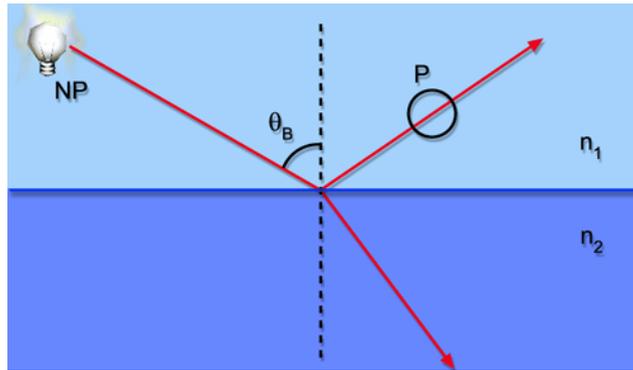


Fig. 7.9 - Polarização por reflexão.

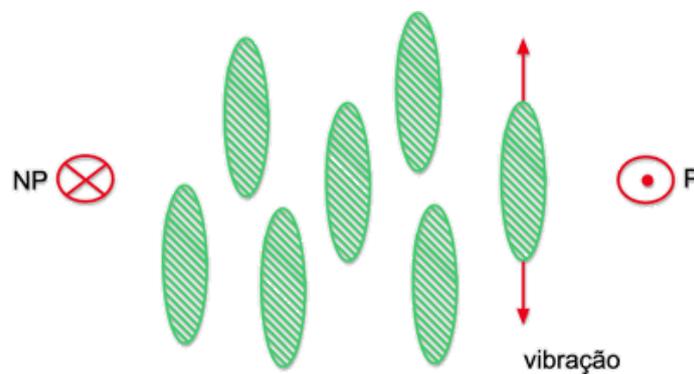


Fig. 7.10 - Polarização por dicroísmo.

### c. Processo de difusão de luz

A luz espalhada por moléculas de um meio geralmente está parcialmente polarizada, como vimos na Dem. 4.2. O maior grau de polarização ocorre quando as direções luz-molécula e molécula-observador formarem um ângulo de  $90^\circ$ , conforme representado na Fig. 7.11.

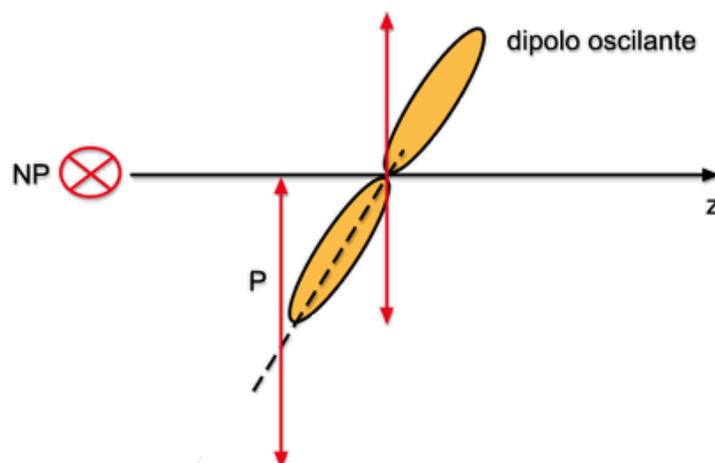


Fig. 7.11 - Polarização por espalhamento.

#### d. Grade metálica

A técnica de polarização da luz usando grade metálica é geralmente usada para infravermelho e micro-ondas. A componente de luz que tiver polarização paralela aos fios da grade produzirá uma corrente elétrica, sendo assim parte dissipada pelo efeito Joule e parte refletida. Por outro lado, a componente perpendicular passa e teremos assim luz linearmente polarizada na direção perpendicular à grade (ver Fig. 7.12).

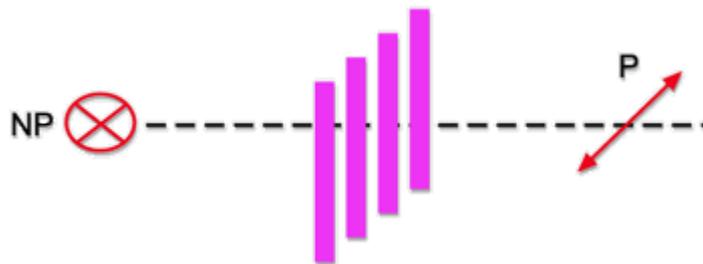


Fig. 7.12 - Polarização por grade metálica.

#### e. Dupla Refração

A dupla refração aparece em materiais birrefringentes tais como mica, quartzo, calcita, KDP, etc. O conhecido prisma de Nicol usa este princípio para polarizar a luz. Considere radiação não polarizada incidente sobre o prisma birrefringente mostrado na Fig. 7.13. A componente de campo elétrico que incidir no meio com polarização paralela ao eixo rápido não sofrerá praticamente deflexão pois  $n_r$  é pequeno (raio ordinário) ao passo que a outra componente será pois  $n_1$  é bem maior (raio extraordinário)

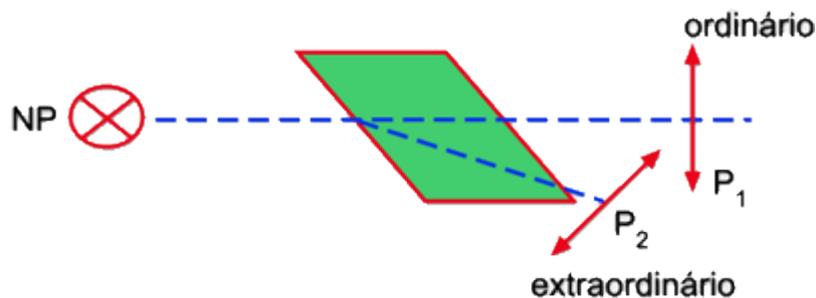


Fig. 7.13 - Polarização por dupla fenda.

## Equação de Fresnel

Estamos interessados em detalhar um pouco mais o que acontece com a radiação eletromagnética quando incide num meio com índice de refração diferente daquela na qual ela se propaga. Em particular queremos analisar os ângulos de reflexão e refração e as amplitudes dos campos elétricos transmitido e refletido.

### Cap.05 - Leis da reflexão e refração

Considere dois meios homogêneos isotrópicos, lineares e não condutores ( $\sigma=J=0$ ) com índices de refração  $n_1$  e  $n_2$ , separados por uma interface localizada sobre o plano  $xz$ . Um raio de amplitude  $E$ , propagando-se no meio 1 incide sobre a interface, formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $y$ . O raio refletido tem amplitude  $E'$  e sua direção de propagação é especificada pelos ângulos  $q'$  e  $\phi'$ . Analogamente, o raio refratado é especificado por  $E''$ ,  $q''$  e  $\phi''$ , como mostra a Fig. 7.14. Note o fato de estarmos supondo que os três raios não estão num mesmo plano.

Das equações de Maxwell podemos deduzir condições de contorno que estabelecem a continuidade das componentes de  $\vec{E}$  ao se passar de um meio para outro. Os campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}'$  e  $\vec{E}''$  são dados por:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{\pm i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} \quad (7.12a)$$

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 \exp\{\pm i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)\} \quad (7.12b)$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 \exp\{\pm i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t)\} \quad (7.12c)$$

enquanto que os campos magnéticos se relacionam com os campos elétricos através de:

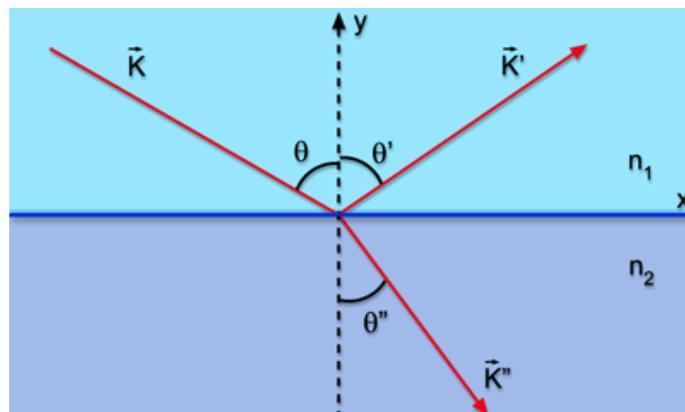


Fig. 7.14 - Geometria da reflexão e refração de um raio de luz.

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\mu\omega} \quad (7.13a)$$

$$\vec{H}' = \frac{\vec{k}' \times \vec{E}'}{\mu\omega} \quad (7.13b)$$

$$\vec{H}'' = \frac{\vec{k}'' \times \vec{E}''}{\mu\omega} \quad (7.13c)$$

Tomando um pequeno elemento de volume  $S dh$  contendo parte da interface (Fig. 7.15), podemos aplicar a forma integral da lei de Gauss:

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{D} d\vartheta = \int_s \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_v \rho d\vartheta = \int_v \rho dh da \quad (7.14)$$

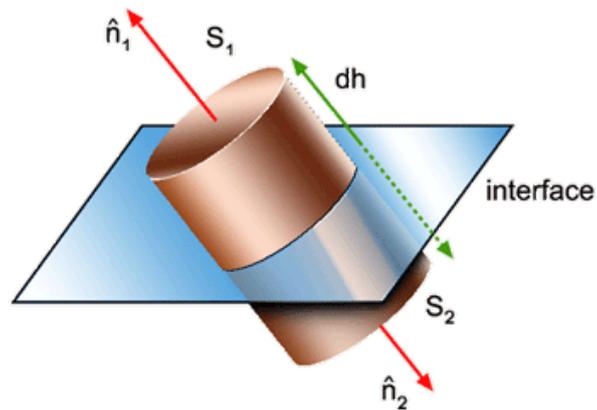


Fig. 7.15 - Elemento de volume usado na obtenção das condições de contorno.

Como a carga superficial é dada por  $\lim_{dh \rightarrow 0} \int_h \rho dh$ , ficamos com:

$$\int_s \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_s \sigma da \quad (7.15)$$

Assim, de acordo com a Fig. 7.15, temos:

$$\int_{s_1} \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 da + \int_{s_2} \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 da = \int_s \sigma da \quad (7.16)$$

Note que  $S_1 = S_2 = S$  pois  $dh \approx 0$  e  $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2 = \hat{n}$ . Logo, a equação acima nos leva a:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad (7.17)$$

que estabelece que a variação da componente normal do deslocamento elétrico é igual à carga superficial. No nosso caso específico  $\sigma = 0$ , logo, a componente normal de  $\vec{D}$  é contínua:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \quad (7.18)$$

Procedendo de maneira análoga com as outras equações de Maxwell, obtemos: ( $\vec{E} \parallel \vec{B}$  perp.  $\vec{K} \parallel \vec{n}$ ) **7.17 é produto escalar**

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (7.19)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (7.20)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J} = 0 \quad (7.21)$$

A eq. (8.17) nos diz que para  $y = 0$  a componente tangencial do campo elétrico é contínua, logo:

$$\begin{aligned} E_{0x} \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} + E'_{0x} \exp\{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)\} \\ = E''_{0x} \exp\{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t)\} \end{aligned} \quad (7.22a)$$

para a componente x e

$$\begin{aligned} E_{0z} \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} + E'_{0z} \exp\{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)\} \\ = E''_{0z} \exp\{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t)\} \end{aligned} \quad (7.22b)$$

para a componente z. Como estas igualdades são válidas para qualquer t e qualquer ponto r da interface, devemos ter:

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad (7.23a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r} = \vec{k}'' \cdot \vec{r} \quad (7.23b)$$

onde  $\vec{r} = x\hat{i} + z\hat{k}$ . Esta última igualdade nos diz que os vetores  $\hat{k}$ ,  $\hat{k}'$  e  $\hat{k}''$  são coplanares, isto é,  $\phi' = \phi'' = 0$  e portanto:

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \theta'' \quad (7.24)$$

Por outro lado,  $k = k'$  pois  $k = \omega/v_1$  e  $k' = \omega'/v_1 = \omega/v_1$ , mesmo meio. Logo,  $\theta = \theta'$ , ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão  $\theta'$ .

O ângulo de refração  $\theta''$  pode ser encontrado usando-se  $k = n_1 k_0$  e  $k'' = n_2 k_0$  na eq. (8.22). Assim,  $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta''$ , que é chamada de lei de Snell.

Em resumo temos as seguintes regras: (i) os raios incidente, refletido e refratado são coplanares, (ii) o ângulo de incidência  $\theta$  é igual ao ângulo de reflexão  $\theta'$ , e (iii) os ângulos de incidência e refração se relacionam através da lei de Snell  $\rightarrow n_1 \cdot \sin \theta = n_2 \cdot \sin \theta''$ .

## Amplitude das ondas refletida e refratada

Vamos analisar dois casos: a) aquele em que o raio incidente é paralelo à interface e, portanto, perpendicular ao plano  $xy$ , como mostrado na Fig. 7.16(a), e leva o nome TE (transversal elétrica) ou polarização  $\sigma$  (ou  $s$ ) e (b) quando for paralelo à interface, que corresponde à onda TM (transversal magnética) também chamada polarização  $\pi$  (ou  $p$ ), mostrada na Fig. 7.16(b). No caso (a)  $\vec{E} = E\hat{z}$  e para (b)  $\vec{H} = H\hat{z}$ , o mesmo se dando com as ondas refletida e refratada.

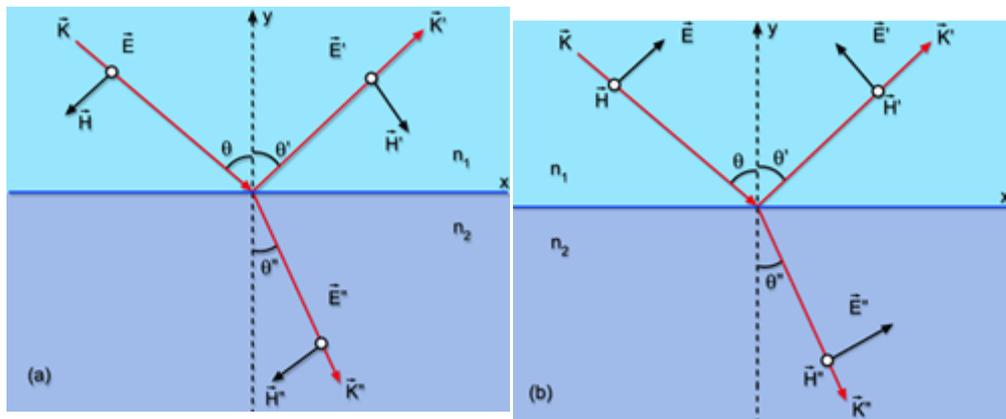


Fig. 7.16 - Reflexão e refração de uma onda  
(a) TE (polarização  $s$ ) e (b) TM (polarização  $p$ ).

Logo, usando as eq. (7.19) e (7.21) podemos fazer a seguinte análise:

### a) Caso TE

Neste caso temos:

$$E + E' = E'' \quad (7.25a)$$

$$H \cos \theta - H' \cos \theta = H'' \cos \theta'' \quad (7.25b)$$

Usando a eq. (8.11) para eliminar  $H$  em função de  $E$ , obtemos:

$$kE \cos \theta - kE' \cos \theta = k''E'' \cos \theta'' \quad (7.26)$$

Assim, obtemos os coeficientes de transmissão  $\tau_\sigma$  e reflexão  $\rho_\sigma$ , definidos por:

$$\tau_\sigma = \frac{E''}{E} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta''} \quad (7.27a)$$

$$\rho_\sigma = \frac{E'}{E} = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \cos \theta''}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta''} \quad (7.27b)$$

### Caso b) TM

$$H - H' = H'' \quad (7.28a)$$

$$E \cos \theta + E' \cos \theta = E'' \cos \theta'' \quad (7.28b)$$

Novamente, usando a eq. (7.13) para eliminar H em função de E, obtemos:

$k(E - E') = k''E''$ , de onde se obtém:

$$\tau_\star = \frac{E''}{E} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta''} \quad (7.29a)$$

$$\rho_\star = \frac{E'}{E} = \frac{-n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta''}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta''} \quad (7.29b)$$

As equações acima podem ser modificadas usando-se a lei de Snell

$\cos \theta'' = \sqrt{1 - \sin^2 \theta''} = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta}$ , e o índice de refração relativo ( $n = n_2/n_1$ ):

$$\rho_\sigma = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (7.30a)$$

$$\rho_\star = \frac{-n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (7.30b)$$

A Fig. 7.17 mostra a variação do coeficiente de reflexão em função do ângulo de incidência quando  $n_2 > n_1$  (reflexão externa). O sinal negativo de significa que o campo elétrico muda a fase em  $180^\circ$  após a reflexão. Note que  $\rho_\pi = 0$  quando:

$$n^2 \cos \theta_B - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_B} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_B = n = \frac{n_2}{n_1} \quad (7.31)$$

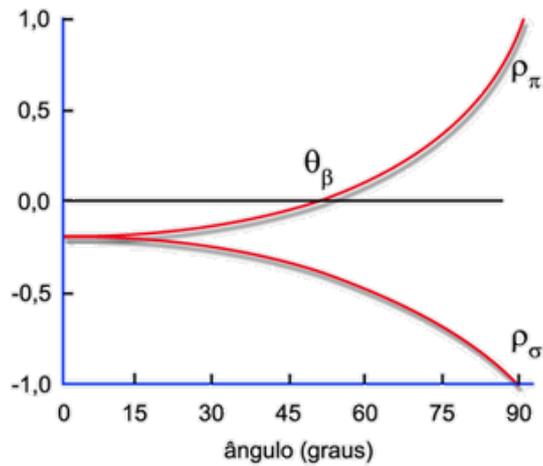


Fig. 7.17 - Coeficiente de reflexão externa.

Como  $n_2 > n_1$  temos  $\text{tg}\theta_B > 1$  e, conseqüentemente,  $\theta_B > 45^\circ$ .  $\theta_B$  é conhecido com ângulo de Brewster.

A Fig. 8.16 mostra o caso da reflexão interna ( $n_1 > n_2$ ) com o ângulo de Brewster, sendo agora menor que  $45^\circ$ . Por outro lado, quando  $n = \text{sen}\theta$  temos um ângulo crítico  $\theta_c$  acima do qual  $\rho_\sigma = \rho_\pi = 1$ . Para  $n$  menor que  $\text{sen}\theta$  temos:

$$\rho_\sigma = \frac{\cos\theta - i\sqrt{\text{sen}^2\theta - n^2}}{\cos\theta + i\sqrt{\text{sen}^2\theta - n^2}} \Rightarrow |\rho_\sigma| = 1 \quad (7.32)$$

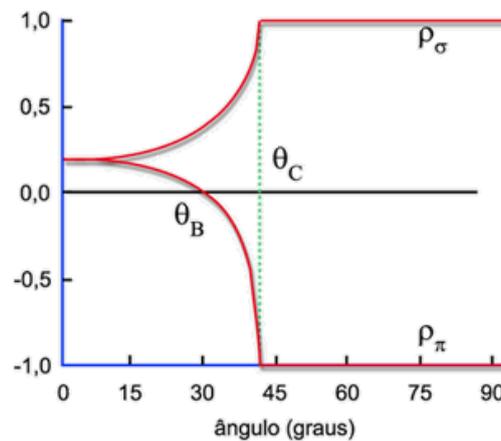


Fig. 7.18 - Coeficiente de reflexão interna.

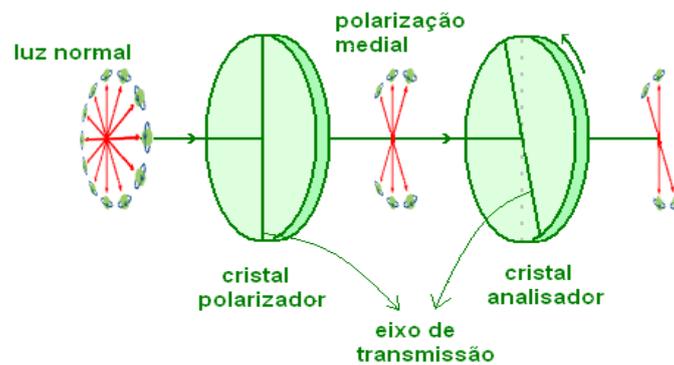
#### Videos

[http://www.youtube.com/watch?v=Sdv0J57\\_U5g&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=Sdv0J57_U5g&feature=related)

<http://www.youtube.com/watch?v=QgA6L2n476Y&feature=related> (em inglês)

<http://www.youtube.com/watch?v=hk1zHaXdcv8&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=yLEjtApLvr4&feature=related>



**Figura 27: Equipamento destinado à análise da luz polarizada. O primeiro cristal polariza a luz "normal" em uma determinada direção fixa (neste caso na direção vertical). O segundo cristal gira em torno da direção de propagação da luz. Compara-se a intensidade da luz que emerge do primeiro cristal (polarizador) com aquela que emerge do segundo cristal (analisador), para ângulos diversos entre os eixos de transmissão dos dois cristais.**

## Cap08 - Princípios Básicos de um Telescópio Newtoniano

### Introdução

Nesse capítulo pretendemos abordar os aspectos fundamentais relativos ao projeto do tipo de telescópio mais utilizado pelo astrônomo amador, o Newtoniano [Roberto Frangetto]. Aqui poderemos ver na prática como os conceitos de ótica geométrica, interferência e difração da luz se aplicam na construção e utilização de instrumentos óticos.

O **telescópio newtoniano**, ver figura 8.1, diferentemente da luneta que utiliza apenas lentes para aproximar as imagens, usa um espelho esférico ou parabólico para captar a luz. A imagem refletida por esse espelho incide em um espelho plano e, em seguida, vai a uma lente ocular, que é responsável pelo foco.

### Relações Geométricas Relevantes

- **Diâmetro interno do tubo**

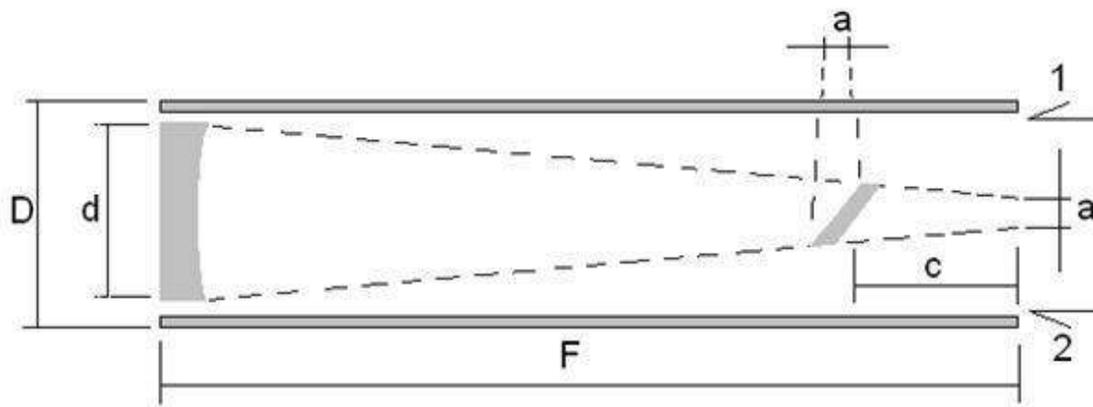
Para que se possa observar um objeto utilizando-se um equipamento do tipo telescópio newtoniano temos que os raios de luz que entrem em seu interior atinjam o seu espelho interior. Como se pode verificar na figura 8.1, para que os raios luminosos 1 e 2 atinjam o espelho principal, se faz necessário que o diâmetro interno do tubo seja maior que o diâmetro do espelho principal.

Por simples considerações geométricas, chega-se à seguinte relação que fornece o diâmetro interno mínimo do tubo em função do diâmetro do espelho principal e da abertura máxima da ocular;

$$D_{\min} = d' + a \quad (8.1)$$

O que acontecerá se usarmos um tubo que tenha um diâmetro interno menor do que o mínimo?

Pode-se ver na figura 8.1, que os raios luminosos 1 e 2 não penetrarão no tubo, o que fará com que o campo visual, com a ocular considerada, se apresente desigualmente iluminado. Brilhante no centro e se apagando na periferia.



**Fig.8.1 - Esquema de um telescópio refletor**

- A = diâmetro do círculo focal [mm]
- C = projeção do plano focal [mm]
- D = diâmetro do espelho principal [mm]
- D = diâmetro interno do tubo [mm]
- F = distância focal do espelho [mm]
- 1 = eixo maior do espelho diagonal [mm]
- 2 = eixo menor do espelho diagonal [mm]

### Dimensão do espelho diagonal

Para que se obtenha a melhor qualidade possível da imagem, é essencial que o espelho diagonal tenha um contorno elíptico. Suas dimensões podem ser calculadas pelas expressões que se seguem, as quais podem ser deduzidas a partir da figura 8.2.

$$l_2 = a + \frac{c \cdot (d - a)}{F} \quad \text{e} \quad l_1 = \sqrt{2} \cdot l_2 = 1,414 \cdot l_2 \quad (8.2)$$

Se o valor de  $l_2$  for menor que  $(c \times d)/F$ , o resultado é simplesmente desastroso, pois somente uma parte do campo visual é preenchido pelo espelho diagonal, o que torna impraticável o uso do telescópio.

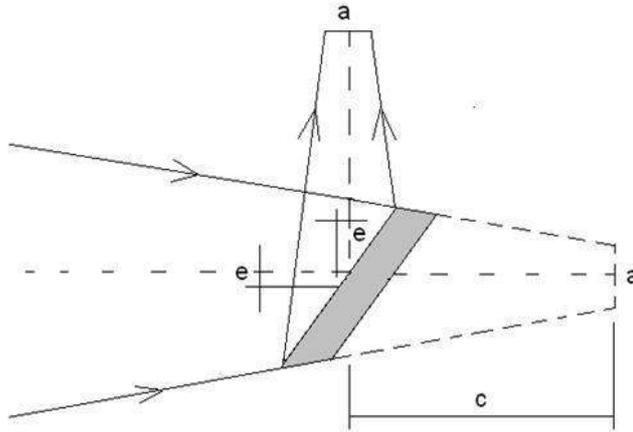


Fig.8.2 - e = deslocamento do centro do espelho diagonal em mm

### Campo Angular Máximo

A partir da figura 8.2, obtém-se a expressão que fornece o campo angular visual do telescópio em função da abertura da lente de campo da ocular e da distância focal do espelho principal.

$$\alpha = \frac{a}{F} \times 3438 \quad (8.3)$$

No caso do Instrumento ser projetado para uso geral, geralmente impõe-se para  $\alpha$  um valor ao redor de 60 minutos de arco, o que permite a observação de uma grande variedade de objetos.

Já para observação específica do sol ou da lua, o projeto requer  $\alpha=35'$  e para observação de alta resolução de planetas e de estrelas binárias, basta projetar o instrumento para  $\alpha$  situando-se entre 5 e 10 minutos de arco, com oculares de grandes aumentos.

### Excentricidade da Montagem do Espelho Diagonal

Como se pode verificar na figura 8.2, o centro do espelho diagonal deve ser posicionado com um deslocamento e em relação ao eixo do tubo. Esse deslocamento faz com que o centro do espelho diagonal fique afastado da porta ocular e “empurrado” para perto do espelho principal. A expressão que fornece esse deslocamento é:

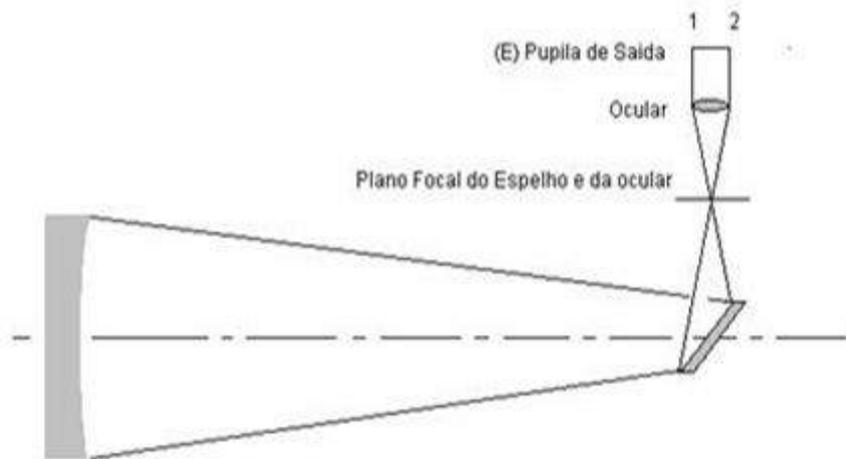
$$e = l_2 \cdot \frac{d - a}{4F} \quad (8.4)$$

## Pupila de saída

Quando, num telescópio, colocamos uma ocular com distancia focal equivalente igual a  $f_e$  e, em seguida, focalizamos um objeto distante, a configuração dos raios luminosos 1 e 2 se verifica conforme esquematizados na figura 8.3 abaixo:

O disco (E) formado pela convergência desses raios incidentes na periferia do espelho parabólico é chamada “pupila de saída”, **e nada mais é do que a imagem do espelho principal formada pela ocular em uso.**

É possível medir o diâmetro da pupila de saída, bastando dispor-se de um dispositivo de medição de grande precisão.



**Fig.8.3 – Esquema do caminho ótico da luz desde a entrada até a pupila de saída.**

Essa medição apresenta um certo interesse para o astrônomo Amador, pois, através dela é possível determinar experimentalmente a distância focal equivalente de uma ocular ou de um sistema Barlow-ocular cujas características sejam duvidosas. Para isso, depois de se medir o diâmetro ( $p$ ) da pupila de saída, aplica-se a seguinte expressão:

$$f = \frac{F \cdot p}{d} \quad (8.5)$$

onde:

- $F$  = distância focal do espelho parabólico (mm)
- $f$  = distância focal do ocular (mm)
- $p$  = diâmetro da pupila de saída (mm)
- $d$  = diâmetro do espelho parabólico (mm)

Além dessa importante utilidade, o conhecimento da pupila de saída nos permite avaliar se a ocular em questão é adequada para o nosso telescópio, pois, para observação visual, o diâmetro da pupila de saída não deve nunca ultrapassar o diâmetro da pupila do observador.

## Conceito de Magnitude

A noção de magnitude ou grandeza foi originada na antiga Grécia, quando Hiparco, no segundo século antes de Cristo, agrupou os astros visíveis a olho nu em seis classes conforme o seu brilho decrescente.

Modernamente verificou-se que a escala de Hiparco correspondia razoavelmente bem a uma progressão geométrica com razão de 2,5 aproximadamente.

Adotando-se como unidade de referência o valor do brilho das estrelas de sexta grandeza, obtém-se a seguinte expressão, que relaciona o brilho  $B$  de uma estrela qualquer a sua grandeza  $m$

$$B = 2,512^{\sigma - m} \quad (8.6a)$$

Na forma logarítmica,

$$\log B = 0,4(\sigma - m) \quad (8.6b)$$

## Magnitude Limite de um Microscópio Newtoniano

Considerando-se que, à vista desarmada pode-se perceber uma estrela de grandeza 6.2, deduz-se, por simples considerações sobre as áreas relativas de um telescópio e a do olho humano com a pupila toda dilatada e quando a pupila de saída tiver diâmetro ao redor de 7 mm, que a grandeza limite de um telescópio é dada pela expressão:

$$M = 0,8 + 5 \cdot \log d \quad (8.7)$$

## **Poder de Resolução**

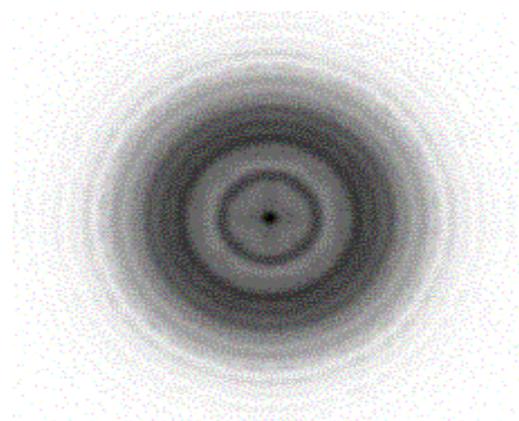
O olho normal é capaz de distinguir dois pontos luminosos ou duas linhas paralelas, desde que estejam separadas o suficiente para que o ângulo de observação seja, no mínimo, um minuto de arco.

Para que haja certa comodidade de observação, adota-se, para efeito de projeto de sistemas ópticos, como quatro minutos de arco o valor do poder de resolução da vista desarmada.

## **A Imagem de Difração de uma Estrela**

A distância das estrelas em relação à Terra é tão grande que, mesmo as gigantes como Betelgeuse, são observadas sob ângulos tão pequenos, que, para todos os fins práticos, podem ser considerados como meros pontos luminosos.

No entanto, ao observarmos as estrelas com telescópios de grande capacidade de aumento (oculares de grandes aumentos), percebe-se que as mesmas produzem uma imagem constituída por um disco central luminoso acompanhado por um ou mais anéis concêntricos.



**Fig.8.4- Figura de Difração**

### ***Disco de Airy***

O disco central dessa figura é denominado *Disco de Airy* e num sistema óptico perfeito, concentra cerca de 84% de toda a luz que penetra no telescópio, em homenagem a Sir George Airy, sétimo Astrônomo Real da Inglaterra, o qual estudou detalhadamente o fenômeno da formação de imagens em telescópios.

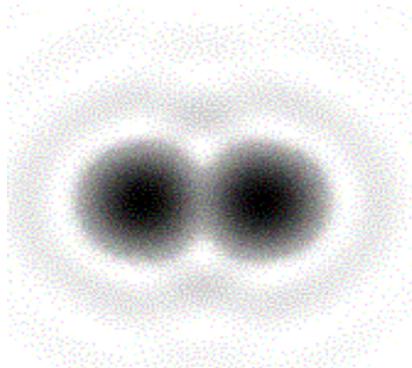
O diâmetro angular do Disco de Airy é quem determina o poder de resolução de telescópios de pequeno e médio porte. Já para os grandes Telescópios, é a turbulência atmosférica que limita o seu desempenho, como teremos oportunidades de discutir mais adiante. O diâmetro angular do Disco de Airy, expresso em segundos de arco, é dado pela expressão a seguir:

$$g = \frac{203}{d} \quad (8.8)$$

### **Poder de Resolução de um Telescópio**

Suponhamos que estamos observando um par de estrelas de sexta-grandeza utilizando um grande aumento, e que as mesmas estão tão próximas uma da outra que os seus Discos de Airy se apresentem interpenetrantes como na figura abaixo.

O valor de separação angular mínima, expressa em segundos de arco, que nos permite perceber as duas Estrelas separadas denomina-se "Poder de Resolução".



**Fig.8.5 – Figura do poder de separação de um TN**

Sua expressão, em função da abertura do Telescópio, foi estabelecida experimentalmente por W. R. Dawes no século dezenove, sendo por isso, também conhecido como "Limite de Dawes". Esse Limite vale:

$$P.R. = \frac{115,8}{d} \quad (8.9)$$

### **Videos**

<http://www.youtube.com/watch?v=UoD2tRAqee0&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=92FYjEJLCsl&feature=related>

[http://www.youtube.com/watch?v=SpkrVw\\_E6Nw&feature=PlayList&p=8DCB3F2E1AF98B48&index=0&playnext=1](http://www.youtube.com/watch?v=SpkrVw_E6Nw&feature=PlayList&p=8DCB3F2E1AF98B48&index=0&playnext=1)

<http://www.youtube.com/watch?v=gvptWeFPWlg&feature=related>

[http://www.youtube.com/watch?v=D0F2TK\\_Tj6Y&feature=PlayList&p=3D58A2EAB6D10187&playnext=1&playnext\\_from=PL&index=9](http://www.youtube.com/watch?v=D0F2TK_Tj6Y&feature=PlayList&p=3D58A2EAB6D10187&playnext=1&playnext_from=PL&index=9)

## MICROSCÓPIO ÓPTICO

### Introdução

O olho humano tem poder de resolução de aproximadamente 0,1 mm ou 100  $\mu\text{m}$ . Isto significa que se você olhar dois pontos separados por uma distância menor que 100  $\mu\text{m}$ , esses pontos aparecerão como um ponto único. Para distinguir estruturas separadas uma das outras por menos de 100  $\mu\text{m}$ , há necessidade de instrumentos ópticos que tenham o seu poder de resolução aumentado. É importante salientar a diferença entre poder de resolução e poder de aumento. Se você ampliar várias vezes uma mesma fotografia comum, a imagem aumenta, mas os pontos separados por menos de 100  $\mu\text{m}$  continuarão a aparecer como um ponto só borrado. É possível, portanto, aumentar a ampliação sem, contudo melhorar a resolução. Os microscópios permitiram ao homem observar estruturas com ampliação maior e maior resolução.

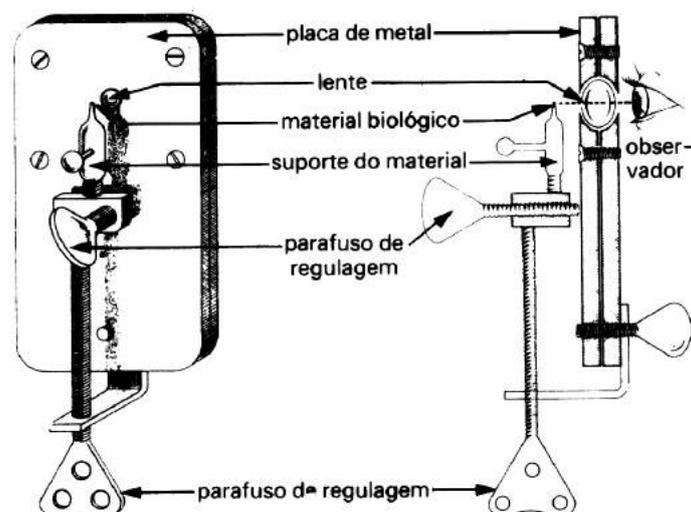


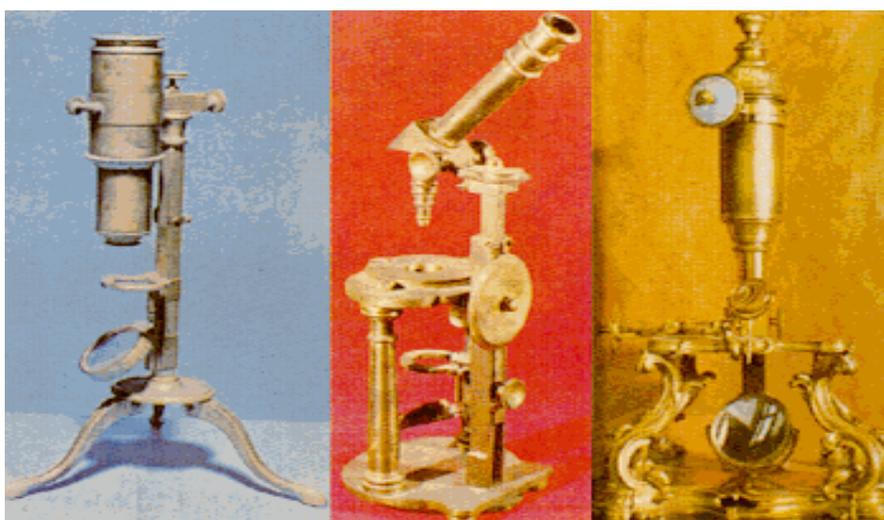
Fig. 8.10 – Figura ilustrativa de um microscópio óptico.

O limite de resolução dos microscópios ópticos, que são aqueles que utilizam a luz para iluminar o objeto que está sendo analisado, é de cerca de  $0,2 \mu\text{m}$  (ou  $200 \text{ nm}$  ou  $2\ 000 \text{ \AA}$ ). Este é melhor que o olho humano cerca de 500 vezes. Não se consegue construir microscópios ópticos com desempenho melhor que este, pois o fator limitante é o comprimento de onda da luz.

## O APARECIMENTO DO MICROSCÓPIO

Depois de quatro séculos de aperfeiçoamento e de fornecer novas utilizações às lentes Galileu criou a lupa no final do século XVI. Com estas efetuou as primeiras observações de objetos e seres. Com ele os cientistas da época foram capazes de observar e descobrir novos pormenores e características nos seres conhecidos.

No século XVI expandiu-se a construção e o aperfeiçoamento do microscópio, particularmente do sistema de lentes deste. Antonie Van Leeuwenhoek e Zacharias Jansen, fabricantes de óculos, desenvolveram os primeiros microscópios simples e compostos, respectivamente. Estes aparelhos utilizavam a luz refletida pelo objeto fortemente iluminado. Vários modelos foram construídos, entre os quais alguns de valor histórico, como por exemplo o de Robert Hooke. Mas teria de decorrer quase um século até que o microscópio óptico composto, sucessivamente aperfeiçoado, fosse capaz de permitir imagens com grande ampliação e com qualidade acurada.

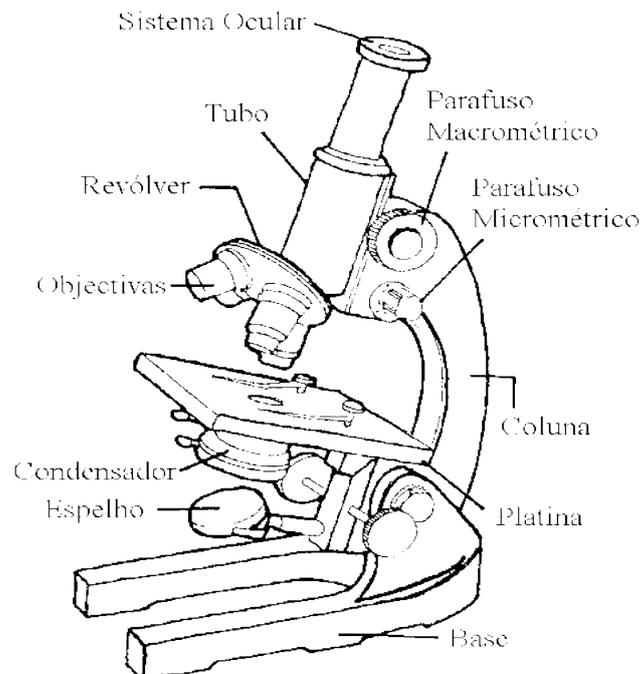


**Fig.8.11 – Modelos Históricos**

## Constituição do Microscópio Óptico Composto

Atualmente, o microscópio óptico composto (M.O.C.) é constituído por duas partes – uma parte mecânica e uma parte óptica. Cada parte engloba uma série de componentes constituintes do microscópio (fig. 8.12). A parte mecânica serve para dar estabilidade e suportar a parte óptica. Esta parte é constituída por:

- Pé ou Base – suporta o microscópio, assegurando a sua estabilidade.
- Braço ou Coluna – peça fixa à base, na qual estão aplicadas todas as outras partes constituintes do microscópio.
- Tubo ou Canhão – cilindro que suporta os sistemas de lentes, localizando-se na extremidade superior a ocular e na inferior o revólver com objetivas.
- Platina – peça circular, quadrada ou retangular, paralela à base, onde se coloca a preparação a observar, possuindo no centro um orifício circular ou alongado que possibilita a passagem dos raios luminosos concentrados pelo condensador.
- Parafuso Macrométrico – engrenagem que suporta o tubo e permite a sua deslocação a da platina. É indispensável para fazer a focagem.

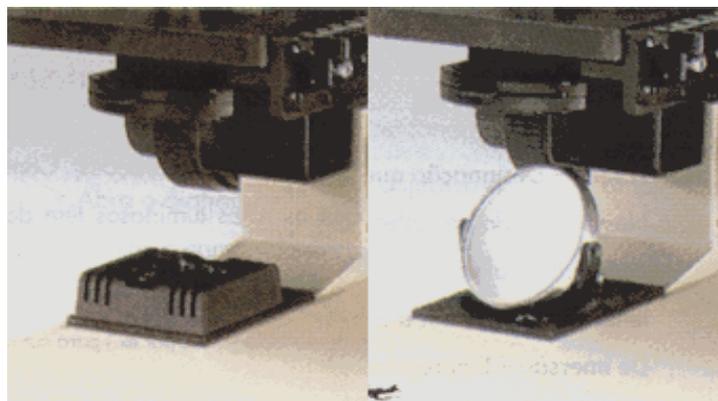


**Fig.8.13 - Esquema de um M.O.C**

- Parafuso Micrométrico – imprime ao tubo ou à platina movimentos de amplitude muito reduzida, completando a focagem. Permite explorar a profundidade de campo do microscópio.
- Revólver – disco adaptado à zona inferior do tubo, que suporta duas a quatro objetivas de diferentes ampliações: por rotação é possível trocar rápida e comodamente de objetiva.

#### **A parte óptica é constituída por:**

- Sistema de Oculares e Sistema de Objetivas – o conjunto de lentes que permitem a ampliação do objeto. A ampliação fornecida ao microscópio é igual ao produto da ampliação da objetiva pela ampliação da ocular.
- Fonte Luminosa – existem vários tipos de fontes luminosas (fig.8.13), podendo ser uma lâmpada (iluminação artificial) ou um espelho que reflita a luz solar (iluminação natural).
- Condensador – distribui regularmente, no campo visual do microscópio, a luz refletida pelo espelho.
- Diafragma – regula a intensidade luminosa no campo visual do microscópio.



**Fig.8.14 – Parte ótica de um microscópio composto.**

#### **Características da Imagem do M.O.C.**

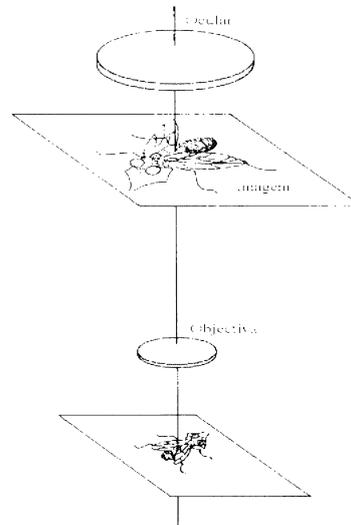
O objeto a ser observado deve ser colocado muito perto do foco objeto do sistema da objetiva para que se forme uma imagem real, invertida, de maiores dimensões, que vai servir de objeto em relação à ocular. Esta cria uma

imagem virtual, invertida (nos dois sentidos) em relação ao objeto a ser observado.

### Sistemas de Lentes

- Temos cinco tipos de oculares:
- Huygens
- Hi-Point
- WideField
- Hyperplane Compensating
- Ultraplane

Fig.8.15 Formação de Imagem



### Resolução

Segundo Raleigh dois objetos podem ser distinguidos quando o máximo central de um coincide com o primeiro mínimo do outro. A intensidade entre dois picos contém 80% do pico inicial. A fig. 8.16 mostra este critério para o microscópio.

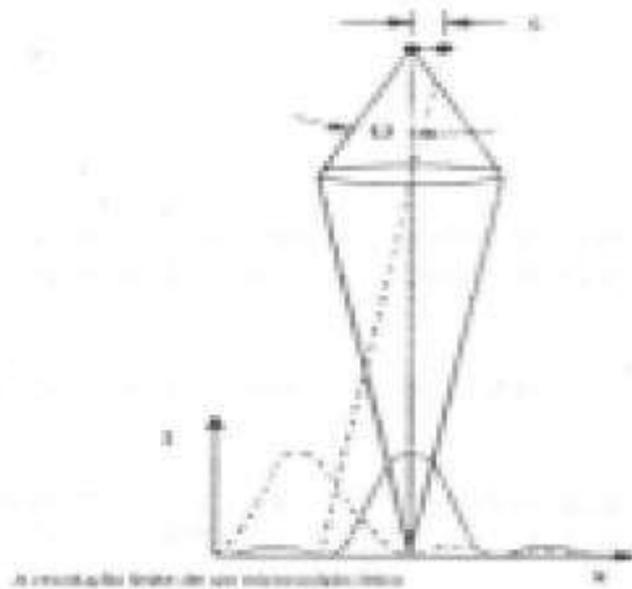


Fig.8.16 – A resolução limite de um microscópio óptico

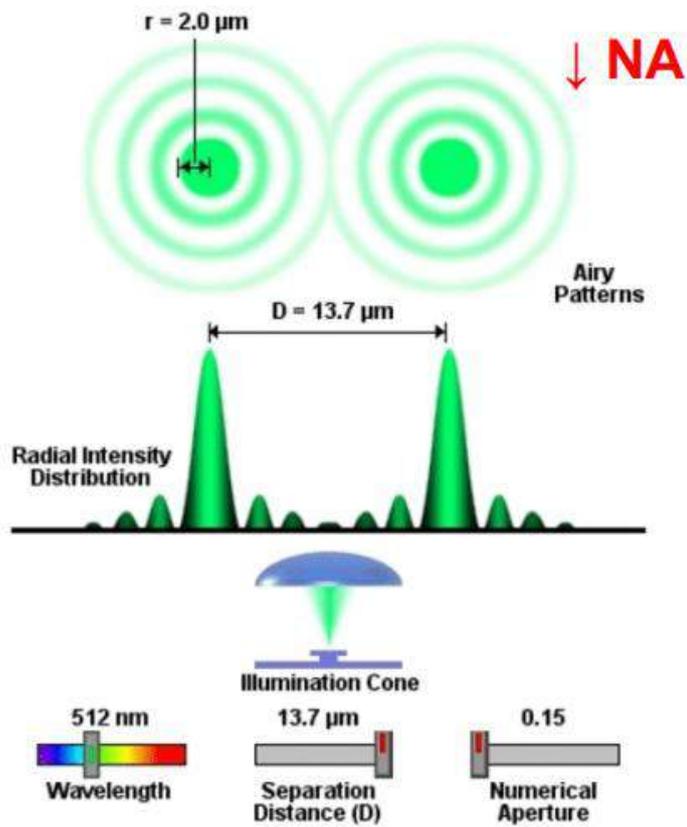


Fig. 8.17a – Exemplo de imagens superpostas que não satisfazem o critério de Raleigh

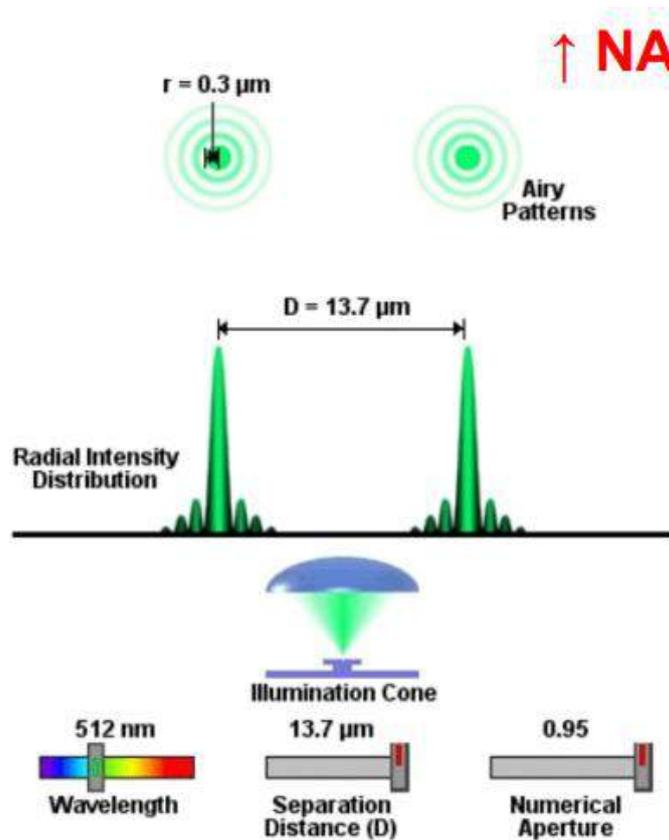


Fig. 8.17b – Exemplo de imagens superpostas que satisfazem o critério de Raleigh

A resolução é a mínima distância entre pontos ou partes de um objeto. A equação 1 define o limite de resolução de um microscópio óptico segundo o critério de Raleigh:

$$\delta := \frac{0.61 \cdot \lambda}{n \cdot \sin(\theta)} \quad \text{ou} \quad \delta := \frac{0.61 \cdot \lambda}{NA} \quad (8.10)$$

A abertura numérica que aparece na equação acima expressa o poder de resolução das lentes e o brilho da imagem formada, quanto maior a abertura numérica melhor a qualidade da resolução. Em compensação há um comprimento da profundidade de foco definida pela equação 2:

$$D_{\text{focus}} := \frac{\lambda}{4 \cdot (NA)^2} \quad (8.11)$$

As lentes objetivas são responsáveis pela ampliação da amostra. Para uma grande ampliação e uma alta resolução necessita-se de lentes objetivas com uma grande abertura numérica (NA). Esse parâmetro determina o poder separador do microscópio e é dado pela equação 8.12:

$$\bullet \quad NA := n \cdot \sin(\theta) \quad (8.12)$$

Onde:

$n$  é o índice de refração do meio em que está imersa a lente frontal da objetiva.

$\theta$  é o ângulo do cone de luz que penetra na objetiva.

## Poder Separador

Já o poder separador do microscópio é a medida da capacidade de um instrumento óptico discriminar objetos pontuais muito próximos. Esta capacidade depende das figuras de difração, desde que as aberrações tenham sido corrigidas na equação 4.

$$P := \frac{NA}{61.1} \quad (8.13)$$

## Limite do M.O.C.

"... No início do século XIX estava definido o limite de resolução do microscópio óptico. Segundo o físico alemão Ernst Abbe (1840-1905), esse limite dependia principalmente do comprimento de onda ( $\lambda$ ) da luz com que se observa o objeto. O MO não pode ver pontos do objeto mais próximos do que 0,2 micrometros ( $1 \mu\text{m} = 10^{-3} \text{mm}$ ), ou seja, seu aumento máximo está em torno de mil vezes. (Não muito mais do que Leeuwenhoek conseguia!) [ ]

O conhecimento dos fenômenos ondulatórios permite-nos saber que a imagem de um ponto luminoso obtida através de uma lente é formada por um círculo central luminoso cercado de anéis claros, com intensidades decrescentes (difração). Quando buscamos pequenos aumentos não observamos essa figura, mas é ela que determina o limite de aumento para cada diâmetro da lente e para cada cor da luz de iluminação. Quanto maior o comprimento de luz,  $\lambda$ , mais crítica é a situação. Dai concluímos que já atingimos o aumento máximo permitido pelo MO, pois as aberrações (distorções) das lentes já foram suficientemente bem corrigidas, mas o nosso olho infelizmente não vê a luz com  $\lambda$  menor que o violeta. É então que entramos em um novo universo que o ME pôde proporcionar.

## Referências

<http://www.colegiosaofrancisco.com.br/alfa/microscopio/aparecimento-do-microscopio.php>

Regis Eugenio dos Santos.

<http://www.dsif.fee.unicamp.br/~furio/IE607A/MO.pdf>

Rudolf Kingslake (Ed.). "Applied Optics and Optical Engineering", Vol. IV, Parte I, Pág. 31-93, 1967.

Pieter Burggraaf, "Guidelines for Optical Microscopy", Semiconductor International, Vol.8, No 2, pg 52, 1988